MA1101 - Introducción al Álgebra
Auxiliar 5

Matías Azócar Carvajal

Universidad de Chile

26 de Mayo de 2020

Resumen

Conjuntos... pero más *picantes*

Resumen

Conjuntos... pero más *picantes*

Ya vimos (más o menos) como trabajar con conjuntos, ahora, introducimos algunos conceptos muy importantes que permitirán ir más allá en el conocimiento de conjuntos.

Resumen

Conjuntos... pero más *picantes*

Ya vimos (más o menos) como trabajar con conjuntos, ahora, introducimos algunos conceptos muy importantes que permitirán ir más allá en el conocimiento de conjuntos.

- Sean a y b en E y F, respectivamente, se define el **par ordenado** (o 2-*tupla*) de a y b como el conjunto $\{a, \{a, b\}\}$ que se anota (a, b).

Resumen

Conjuntos... pero más *picantes*

Ya vimos (más o menos) como trabajar con conjuntos, ahora, introducimos algunos conceptos muy importantes que permitirán ir más allá en el conocimiento de conjuntos.

- Sean a y b en E y F, respectivamente, se define el **par ordenado** (o 2-*tupla*) de a y b como el conjunto $\{a, \{a, b\}\}$ que se anota (a, b).
- $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \ \wedge \ b = b'$

Resumen

Conjuntos... pero más *picantes*

Ya vimos (más o menos) como trabajar con conjuntos, ahora, introducimos algunos conceptos muy importantes que permitirán ir más allá en el conocimiento de conjuntos.

- Sean a y b en E y F, respectivamente, se define el **par ordenado** (o 2-*tupla*) de a y b como el conjunto $\{a, \{a, b\}\}$ que se anota (a, b).
- $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \ \wedge \ b = b'$
- Sean $A \subseteq E$ y $B \subseteq F$ dos conjuntos. El **producto cartesiano** entre A y B (denotado $A \times B$) se define como sigue:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Resumen

¿Y qué quiere decir todo esto?

Resumen

¿Y qué quiere decir todo esto?

Veamos un ejemplo pequeño con $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 7, 9\}$

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$
$$= \{(1,1), (1,7), (1,9), (2,1), (2,7), (2,9)\}$$

$$B \times A = \{(1,1), (1,2), (7,1), (7,2), (9,1), (9,2)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times A = A \times A \checkmark$$

Resumen

Vamos por partes

Resumen

Vamos por partes

Llamamos **conjunto potencia** (o partes) de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto que contiene a todos los subconjuntos de A. En otras palabras:

Resumen

Vamos por partes

Llamamos **conjunto potencia** (o partes) de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto que contiene a todos los subconjuntos de A. En otras palabras:

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

Resumen

Vamos por partes

Llamamos **conjunto potencia** (o partes) de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto que contiene a todos los subconjuntos de A. En otras palabras:

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

¿Qué cosas podemos decir de $\mathcal{P}(A)$?

- $\exists A : \mathcal{P}(A) = \emptyset$? Falso, $\emptyset \subseteq A$, $\forall A$ conjunto $\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{P}(A)$ siempre
- $|\mathcal{P}(A)| = \, ? = 2^{|A|}$ ¿por qué?

  A: 1 → 0, 1; 2 → 0, 1; 3 → 0, 1; 4 → 0, 1

  $|\mathcal{P}(A)| = 2^4$
- $A \in \mathcal{P}(A)$

Resumen

Ejemplo de lo anterior

Obtengamos las partes del conjunto $\{1, 2\}$

4 elementos.

$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\mathcal{P}(\emptyset) = ?$ $\{\emptyset\}$

¿$\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$? No

tiene 1 elemento que es lo mismo que 2^0.

$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = ?$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ← tiene 2 elementos $= 2^1$ ✓

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ → 4 elementos

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ → 8 elementos.

Resumen

Resumen

Partición

Resumen

Partición

Una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se dirá **partición** de A si:

Resumen

Partición

Una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se dirá **partición** de A si:

- $\forall C \in \mathcal{C},\ \ C \neq \emptyset$

Resumen

Partición

Una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se dirá **partición** de A si:

- $\forall C \in \mathcal{C},\ \ C \neq \emptyset$
- Los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos de a pares, esto es, $C, C' \in \mathcal{C},\ C \neq C' \Rightarrow C \cap C' = \emptyset$

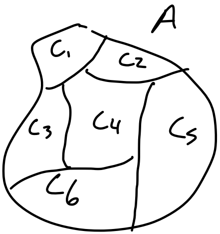
Resumen

Partición

Una colección de conjuntos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se dirá **partición** de A si:

- $\forall C \in \mathcal{C}, \;\; C \neq \emptyset$
- Los elementos de $\mathcal{C}$ son disjuntos de a pares, esto es, $C, C' \in \mathcal{C}, \; C \neq C' \Rightarrow C \cap C' = \emptyset$
- $\mathcal{C}$ cubre a A, esto es, $\displaystyle\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

Los elementos de $\mathcal{C}$ se denominan **partes**.



$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ es partición de A.

AHORA LO QUE TODOS ESPERABAN

AHORA LO QUE TODOS ESPERABAN

Problemas

DISCLAIMER

Problemas

DISCLAIMER

Para efectos de los siguientes problemas, E y F son conjuntos de referencia.

Problemas

Flashbacks (de Vietnam)

Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$.

- Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.
- Pruebe que $(A \setminus B) \times (C \setminus D) \subseteq (A \times C) \setminus (B \times D)$. Muestre, con un contraejemplo, que no se tiene la igualdad.
- Pruebe que $A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \Rightarrow C = D$.

Problemas

Demostración Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.

$(A \cup B) \times F \subseteq A \times F \cup B \times F$

$\to (A \dot\cup B) \times F = A \times F \dot\cup B \times F$ (lo demostraremos).

Sean A, B disjuntos. $A, B \subseteq E$.

$\subseteq$] Sea $(x,y) \in (A \dot\cup B) \times F$ arbitrario. Tenemos dos casos.

$A \dot\cup B = A \cup B$
$\wedge\ A \cap B = \emptyset$

- $x \in A$, $y \in F \Rightarrow (x,y) \in A \times F \subseteq A \times F \cup B \times F$

  $\Downarrow$

  $x \notin B$

- $x \in B$, $y \in F \Rightarrow (x,y) \in B \times F \subseteq A \times F \cup B \times F$

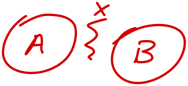
  $\Downarrow$

  $x \notin A$

Problemas

Demostración Sea $(x,y)\in A\times F\cup B\times F$. Veamos que $A\times F$ y $B\times F$ son disjuntos. Si no lo fueran $\Rightarrow$

$$(A\times F)\cap(B\times F)\neq\emptyset \iff \underbrace{(A\cap B)}_{\substack{?\\ \emptyset}}\times F\neq\emptyset.$$



$$\iff \emptyset\times F\neq\emptyset \quad \ast.$$

Luego, $A\times F$ y $B\times F$ son disjuntos. Luego, sea $(x,y)\in A\times F\cup B\times F \Rightarrow$ 2 casos:

$$(x,y)\in A\times F \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow\\ x\notin B}}{x\in A} \wedge y\in F \Rightarrow (x,y)\in(A\cup B\times F)$$

Análogo para $(x,y)\in B\times F$. Luego, tenemos la igualdad.

Problemas

Demostración

Pruebe que $(E \setminus A) \times F = (E \times F) \setminus (A \times F)$.

¿$E \setminus A$ y A como son? Disjuntos!

Luego, usamos la propiedad:

$$((E \setminus A) \cup A) \times F = (E \setminus A) \times F \,\dot{\cup}\, A \times F$$

$$E \times F = (E \setminus A) \times F \,\dot{\cup}\, A \times F$$

por conj. disjuntos

$$\iff E \times F \setminus (A \times F) = (E \setminus A) \times F$$

$\lightning$

Problemas

$$A \neq \emptyset \wedge A \times C = A \times D \Rightarrow C = D.$$

Demostración

$C = D \iff C \subseteq D \wedge D \subseteq C.$

Sea $x \in C$, arbitrario.

Esquema mental:

$$\begin{tikzcd}
x \in C \arrow[r, "?"] \arrow[d] \arrow[r, bend right=60, "\checkmark\checkmark"'] & x \in D \\
x' \in A \times C \arrow[r] & x' \in A \times D \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Tomamos un elemento $a \in A$ (que existe pues A es no vacío). Luego, $(a, x) \in A \times C$.
$[a \in A,\ x \in C]$

Problemas

Demostración $(a,x) \in A \times C$. Pero $A \times C = A \times D$

Por lo tanto $(a,x) \in A \times D \iff a \in A \wedge x \in D$.

$\Rightarrow x \in D$. Luego, $C \subseteq D$.

La demostración para $D \subseteq C$ es completa y totalmente análoga. $\Rightarrow D \subseteq C$.

$\Rightarrow D = C$

Problemas

Partimos (partes jajaj)

- Encuentre (enumere) todos los elementos de $A \subseteq \mathcal{P}(\{0,1\} \times \{0,1,2\})$ donde

$$C \in A \Leftrightarrow \forall (x,y),(x',y') \in C : x + y = x' + y'$$

- Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = n\}$. Demuestre que $C = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\mathcal{P}(\{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(0,2),(1,2)\})$

2^6 elementos, es muy grande! (64)

Problemas

Demostración Lo que caracterizará a los conjuntos $C \in A$ será la suma de las componentes de los pares que viven en cada C.

$C_0 = \{(0,0)\}$

$C_1 = \{(0,1),(1,0)\}, \; C_1' = \{(0,1)\} \Rightarrow$ (el verdadero C_1 serán las partes del más grande (el que contiene todos los pares que sumen 1)

$C_2 = \{(1,1),(0,2)\}$

$C_3 = \{(1,2)\}$

(hay del 0 al 3 pues esas son las posibles sumas).

Problemas

Demostración

$\rightarrow C_0 = \{(0,0)\}$

$\rightarrow C_1 = \{(0,1),(1,0)\},$

$C_2 = \{(1,1),(0,2)\}$

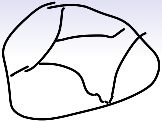
$C_3 = \{(1,2)\}$

$$A = \Big\{ \underbrace{\emptyset}_{\text{vacuidad}},\ \underbrace{\{(0,0)\}}_{C_0},\ \underbrace{\{(0,1),(1,0)\}}_{C_1},$$

$$\underbrace{\{(0,1)\},\ \{(1,0)\}}_{C_1},\ \underbrace{\{(1,1),(0,2)\}}_{C_2}$$

$$\underbrace{\{(1,1)\},\ \{(0,2)\}}_{C_2},\ \underbrace{\{(1,2)\}}_{C_3} \Big\}$$

Problemas



Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $D_n = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = n\}$.
Demuestre que $C = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

partes

C es partición:

$D_0 = \{(0,0)\}$

$D_1 = \{(0,1),(1,0)\}$

i) $D_n \neq \emptyset$ ✓

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(0,n) \in D_n$ (pues $0+n = n$)

ii) $D_i \cap D_j \neq \emptyset \Rightarrow D_i = D_j$ ($\Leftrightarrow$ $D_i \neq D_j \Rightarrow D_i \cap D_j = \emptyset$) ✓

$\exists (x,y) \in D_i \cap D_j \Rightarrow x+y=i \wedge x+y=j \Rightarrow i=j \Rightarrow D_i = D_j$

iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\subseteq$] $D_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (pues de ahí sacamos los pares)

$\Rightarrow \bigcup D_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ✓

Problemas

Demostración

$\supseteq$) Sea $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ arbitrario.

(quiero $(a,b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, cómo lo hago?)

$\Rightarrow (a,b) \in D_{a+b}$, pues $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ y $a+b = a+b$.

Luego, $(a,b) \in D_{a+b} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$

Concluyendo lo pedido.

Resumen

Función

Resumen

Función

Diremos que la 3-*tupla* $f = (A, B, G)$ es función de A en B si:

- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$

A G se le llama el grafo de la función f

Problemas

FUN-ciones

Se quiere definir una función con dominio $\mathcal{P}(N)$ y codominio N. En cada uno de los siguientes casos, indique si queda bien definida (justifique):

- A $S \in \mathcal{P}(N)$ se le asocia el menor elemento en S.
- A $S \in \mathcal{P}(N)$ se le asocia el mayor elemento en S.
- A $S \in \mathcal{P}(N)$ se le asocia el menor elemento en $S \cup S^c$

Problemas

Demostración