

Introducción al Álgebra MA1101



Auxiliar 10: Conjuntos Infinitos y Estructuras Algebraicas

P1. Demuestre que si X es infinito y $x_0 \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x_0\}|$.

P2. Sean A, B, C tres conjuntos infinitos tales que:

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset \text{ y } |B| = |C|.$$

- (a) ¿Qué relación hay entre $|A \cup B|$ y $|A \cup C|$?
- (b) ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?
- (c) ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?

En todos los casos, demuestra tus afirmaciones.

P3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) \mid n \in \mathbb{N}, a \in A\}.$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

P4. Sea $\mathcal{G} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ Para cada $x, y \in \mathcal{G}$, se define $*$ por: $x * y = xy - x - y + 2$. Pruebe que $(\mathcal{G}, *)$ es un grupo abeliano, es decir:

- a) $*$ es una ley de composición interna
- b) $*$ es asociativa
- c) existe el neutro para $*$
- d) existe el elemento inverso para cada $x \in \mathcal{G}$
- e) $*$ es conmutativa

P5. Sea $(S, *)$ una estructura algebraica con neutro e y $*$ asociativa. Para $a \in S$ fijo, invertible para $*$ y con inverso $a^{-1} \in S$ se define la operación Δ en S como sigue:

$$x, y \in S, \quad x \Delta y = x * a * y.$$

- (a) Demuestre que la ley Δ es asociativa, tiene neutro y encuéntrelo.
- (b) Caracterice los elementos invertibles para Δ y calcule el inverso de a para Δ .