

Clase Auxiliar 9: Coeficientes Binomiales, Cardinalidad Finita e Infinita

P1. a) Demuestre sin usar inducción que

$$\frac{1 \binom{n}{1}}{\binom{n}{0}} + \frac{2 \binom{n}{2}}{\binom{n}{1}} + \dots + \frac{n \binom{n}{n}}{\binom{n}{n-1}} = \binom{n+1}{2}.$$

Hint: Escriba la expresión de la izquierda como una sumatoria y calcúlela usando propiedades de $\binom{n}{k}$.

b) Calcule

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k}.$$

P2. a) Sean $A_1, \dots, A_n$ conjuntos finitos. Demuestre que $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ si y sólo si para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

b) Sea $\mathcal{C}$ una partición de un conjunto finito A de modo que para todo $X, Y \in \mathcal{C}$, $|X| = |Y|$. Demuestre que $|\mathcal{C}|$ divide a $|A|$.

P3. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ Demuestre que

a) $|\{2i+1 : i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\}| = 2^{m-1}.$

b) $|\{\frac{2i+1}{2^n} : i \in \mathbb{N}, n \in \{1, \dots, m\}, 0 \leq i < 2^{n-1}\}| = 2^m - 1.$

P4. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$C = \{x \geq 0 \mid \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in \mathbb{N}\}.$$