Introducción al Álgebra MA1101

Clase Auxiliar 5: Funciones

P1. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones, con f biyectiva, tales que para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5} \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}.$$

Determine fórmulas explícitas para $f(x)$ y $g(x)$, en función de $x \in \mathbb{R}$.

P2. Sea E un conjunto de referencia, $A \subseteq E$ y $A \neq \emptyset$. Definimos la funcion $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ mediante $\varphi(X) = X \triangle A$, para cada $X \in \mathcal{P}(E)$. Determine si φ es:

a) Inyectiva.

b) Epiyectiva.

c) Biyectiva.

Además, indique si existe la función inversa φ^{-1}, y en caso de existir, determine $\varphi^{-1}(Y)$, para cada $Y \in \mathcal{P}(E)$.

Justifique sus respuestas.

P3. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$, y sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

a) Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces h también lo es.

b) Demuestre que si f y g son epiyectivas, entonces h también lo es.

c) Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces h también lo es, y encuentre su inversa.

P4. Sean A, B y C conjuntos, y sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : A \to C$ funciones tales que g es inyectiva, h es biyectiva, y $h = g \circ f$.

Demuestre que f y g son biyectivas, y determine f^{-1} en términos de g, h y/o sus inversas.