

Introducción Teórica

Sea el problema (P) (donde todas las funciones son $\mathcal{C}^1$):

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ \text{s.a. } & g_i(x) \leq 0 \quad i \in I \\ & h_j(x) = 0 \quad j \in J \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

1.1 Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Condición Necesaria

Para el problema (P) , sea $\bar{x}$ un mínimo local que satisface alguna de las calificaciones de restricciones. Luego, existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^{|J|}$ y un vector $\mu \in \mathbb{R}^{|I|}$, con $\mu \geq 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Si además el problema (P) es convexo, es decir h_j son funciones lineales afines, g_i son funciones convexas y f es convexa, entonces la condición anterior es también suficiente para que $\bar{x}$ sea un mínimo global (si f es estrictamente convexa, entonces el mínimo es único).

1.2 Calificación de Restricciones

Definamos $I(\bar{x}) := \{i \in I : g_i(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de restricciones activas para $\bar{x}$.

1.2.1 Independencia Lineal de Gradientes Activos (ILGA)

Un punto $\bar{x}$ factible satisface ILGA si $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j \in J}$ y $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})}$ son vectores linealmente independientes.

1.2.2 Mangasarian-Fromovitz (M-F)

Un punto $\bar{x}$ factible satisface M-F si $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j \in J}$ son vectores linealmente independientes y existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla h_j(\bar{x})d^T = 0 \quad \forall j \in J$ y $\nabla g_i(\bar{x})d^T < 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$.

1.2.3 Condición de Abadie (ACQ)

Un punto $\bar{x}$ factible satisface ACQ si $T(\bar{x}) = L(\bar{x})$.

1.2.4 Condición de Guignard (GCQ)

Un punto $\bar{x}$ factible satisface GCQ si $T(\bar{x})^- = L(\bar{x})^-$.

Obs: $(\text{ILGA}) \Rightarrow (\text{M-F}) \Rightarrow (\text{ACQ}) \Rightarrow (\text{GCQ})$.

1.2.5 Condición de Slater

Supongamos que el conjunto de restricciones es convexo, es decir h_j son funciones lineales afines, g_i son funciones convexas. Si se satisface la condición de Slater:

$$\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\hat{x}) < 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(\hat{x}) = 0 \quad \forall j \in J$$

entonces todo punto factible es regular.