Resumen Control 3

1. Selección adversa

La selección adversa sucede cuando una parte de la negociación tiene información relevante que la otra parte no. En este caso, el agente que posee la mejor información tiene una ventaja ex-ante. La asimetría de información puede causar que las decisiones que se toman constituyan equilibrios no eficientes.

Ejemplo 1. ***El mercado de los limones:***

- *Economía que contrata trabajadores de tipo $\Theta = [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ y productividad θ.*
- *Distribución de trabajadores representada por F, con $F' = f > 0$.*
- *Outside option de trabajadores $= r(\theta)$, con $r'(\theta) > 0$ y $r(\theta) < \theta$.*
- *Si el tipo es conocido por las firmas, entonces las firmas pagan la productividad de cada trabajador, $w(\theta) = \theta$. Todos los trabajadores trabajan en alguna de las firmas y el equilibrio es eficiente.*
- *El conjunto de los trabajadores que aceptan será $\Theta(w) = \{\theta : r(\theta) \leq w\}$.*
    - *Cuando $w \geq r(\overline{\theta})$, entonces:*
    $$\Theta(w) = \Theta$$
    - *Cuando $w < r(\underline{\theta})$, entonces:*
    $$\Theta(w) = \emptyset$$

Ejemplo 2. ***Maldición del ganador:*** *En un ambiente donde hay compradores, vendedores e información privada de un bien, entonces es posible constituir un juego Bayesiano. Dado el precio de transacción, determinado por el tipo del vendedor, el comprador anticipa que la calidad promedio es relativamente más baja en la formulación de su estrategia óptima, lo que puede resultar en precios y equilibrios ineficientes.*

*Este fenómeno lo entendemos como la **maldición del ganador**. El comprador sabe que cuando él compra, adquiere bienes de calidad más baja, ya que la oferta se determina por todos los bienes que hacen que al vendedor le convenga vender. Él adelanta eso y se protege de esta maldición del ganador dando precios más bajos. De esta forma, en el ejercicio visto en clases, bajo $\theta \in [0, 1]$, en equilibrio solo se atraen autos de calidad 0 y se termina pagando 0.*

2. Diseño de mecanismos

Cuando pensamos en diseño de mecanismos, la pregunta tiene que ver con cómo diseñar un juego, cómo diseñar reglas, con el propósito de maximizar algún objetivo social. Por ejemplo, cuando se desea diseñar un sistema tributario, estamos pensando en diseñar reglas de forma tal de maximizar la recaudación o maximizar el excedente total de los contribuyentes.

Ejemplo 3. ***Monopolio***.

- *Monopolista vende bien a compradores. La fricción consiste en que vendedor no conoce la valorización del bien, la cual corresponde a $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.*
- *Dados $q \geq 0$ unidades del bien y una transferencia p, la utilidad del comprador es $u^c = \theta q - p$ y la del vendedor es $u^v = p - c(q)$, donde $c()$ es un fución de costos tal que $c' > 0$ y $c'' < 0$.*

- *El valor de θ es desconocido por el vendedor y desde su perspectiva distribuye de acuerdo a F con $F' = f > 0$.*

Principal resuelve:

$$Max \qquad \int [p(\theta) - c(q(\theta)] f(\theta) d\theta \tag{1}$$

Sujeto a:
1. La restricción de compatibilización de incentivos, siguiendo el mecanismo de revelación:

$$\theta q(\theta) - p(\theta) \geq \theta q(\theta') - p(\theta') \tag{2}$$

2. Y la restricción de participación, siguiendo la racionalidad individual:

$$\theta q(\theta) - p(\theta) \geq 0 \tag{3}$$

Lema 1. *Lema de Myerson.*
Supongamos que p y q son factibles para el problema anterior. Definamos:

$$U(\theta) = \theta q(\theta) - p(\theta)$$

Entonces:

(a) $U(\theta) = U(\underline{\theta}) + \int_{\underline{\theta}}^{\theta} q(s) ds$

(b) $q(\cdot)$ *es no decreciente.*

Es decir, en un mecanismo que satisface las restricciones de compatibilidad de incentivos y de participación, la asignación es no decreciente en los tipos y más aún, entrega esta expresión que entrega el valor de la utilidad del comprador de tipo θ, que solo depende de la utilidad mínima $u(\underline{\theta})$ y la asignación $q(\cdot)$

Y de esta forma, el problema que queremos resolver ahora es:

$$\begin{array}{cc} \text{máx} & \mathbb{E}[q(\theta)[\theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}] - c(q(\theta))] - U(\underline{\theta}) \\ s.a. & U(\underline{\theta}) \geq 0 \\ & q(\theta) \ no\ decreciente \end{array}$$

De aquí se obtiene que cuando $\Phi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$ es creciente en θ (supuesto de regularidad), entonces el problema se resuelve escogiendo:

$$q^*(\theta) \in_{q \geq 0} \Phi(\theta) q - c(q)$$

Lo que caracteriza el mecanismo óptimo.

Externalidad esperada: Se enfrentan externalidades al momento de diseñar un mecanismo. Las preferencias de los consumidores son información privada, y los consumidores pueden exagerar o esconder esa información. El problema consiste en como extraer la información correcta.

Es posible implementar funciones de decisiones socialmente eficientes y con presupuestos balanceados en equilibrios Bayesianos.

- Existen 2 consumidores, $\{i, j\}$
- Utilidades $u_i(x_1, x_2, \theta_i) + t_i$, donde θ_i determina las preferencias privadas de i y T_i transferencia monetaria al agente i.

- $\theta_i \sim F()$, con F de conocimiento común.
- El gobierno pregunta por θ, en donde los agentes anuncian θ_i^A o θ_i'. El gobierno utiliza estos anuncios para implementar su política.
- La norma de consumo consumo eficiente está dada por $x^*(\theta) \in argmax u_1(x, \theta_1) + u_2(x, \theta_2)$ s.t. $_i \in B_i$.
- Mecanismo implementa $x_i(\theta') = x_i^*(\theta')$.
  $T_1(\theta') = \int u_2(x_1^*(\theta_1', \theta_2)dF(\theta_2) + k_1(\theta_2')$. T_1 es simétrico.
- La forma de alinear los incentivos privados con los sociales es definir las transferencias de modo tal que agente i internalize la externalidad esperada que su reporte tiene sobre el jugador j.

Lema 2. *Anunciar la verdad, $\theta_i'(\theta_i) = \theta_i, \ \forall i = \{1, 2\}$, es un EB.*

Presupuestos balanceados requiere:

$$k_1(\theta_2') = -t_2(\theta_2')$$
$$k_2(\theta_1') = -t_1(\theta_1')$$
$$T_1(\theta') + T_2(\theta') = 0, \ \forall \theta'.$$

Mecanismo de Groves: Garantiza decisiones eficientes cuando los agentes siguen estrategias de equilibrio. Se conecta con VCG.

- Mismo ambiente que en parte anterior, pero F no es conocida.
- Mecanismo de Groves funciona cuando F es no conocida, pero el costo es que no es posible implementar la regla eficiente con presupuesto balanceado.
- Mecanismos $x(\theta') = x^*(\theta')$
  $T_1(\theta') = u_2(x^*(\theta'), \theta_2') + k_1(\theta_2')$.
- La externalidad está determinada por la externalidad **realizada**.

Lema 3. *Anunciar la verdad,*

$$\theta_1'(\theta_i) = \theta_i \ \ i = 1, 2$$

es una estrategia dominante; independiente de la realización θ_1' y θ_2', lo mejor que puede hacer cada jugador es jugar su propio tipo. Esto es,

$$\theta_i \in \underset{\theta_i'}{argmax} \ \{u_i(x^*(\theta_i', \theta_{-i}'), \theta_i) + T_i(\theta')\} \forall \theta_i, \theta - -i$$

3. Signalling

Timing:

(a) En la etapa 0, la naturaleza escoge tipo $\theta \in \Theta$ del Jugador 1 de la distribución p.

(b) En la etapa 1 el Jugador 1 observa θ y escoge $a_1 \in A_1$.

(c) En la etapa 2 observa m y escoge $a_2 \in A_2$.

(d) Pagos $u_1(a_1, a_2, \theta)$ y $u_2(a_1, a_2, \theta)$ Varios modelos importantes toman esta forma.

(e) Si las firmas no observan θ, entonces las firmas no pueden elegir el salario a parir de la productividad del trabajador, de esta forma solo habrá un solo salario de equilibrio w, el cual es aceptado por el trabajador de tipo θ tiene $r(\theta) \leq w$.

Equilibrios en modelos de Signalling Consideramos el Equilibrio Bayesiano Perfecto en el modelo de Signalling:

Definición 1. *Un Equilibrio Bayesiano perfecto en el modelo de signalling es un perfil de estrategias*

$s_1(\theta), s_2(a_1)$ junto con las creencias $\mu_2(\theta \mid a_1)$ para el jugador 2 tal que:

(a) La estrategia de J1 es óptima dada la estrategia de J2:
$s_1(\theta)$ resuelve $\max a_1 \in A_1, u_1(a_1, s_2(a_1), \theta)$ para todo $\theta \in \Theta$

(b) Las creencias de J2 son compatibles con la regla de Bayes, esto es, si en cualquier tipo se juega a_1 con probabilidad positiva, entonces:

$$\mu_2(\theta \mid a_1) = \frac{\operatorname{Pr}(s_1(\theta) = a_1) p(\theta)}{\sum_{\theta' \in \Theta} \operatorname{Pr}(s_1(\theta') = a_1) p(\theta')};$$

si el jugador uno nunca usa a_1 entonces, $\mu_2(\theta|a_1)$ es arbitrario.

(c) La estrategia de J2 es optima dadas sus creencias y dada la acción de J1:
$s_2(a_1)$ resuelve $\max a_2 \in A_2, \sum_{\theta \in \Theta} u(a_1, a_2, \theta) \mu_2(\theta|a_1)$ para todo $a_1 \in A_1$

Aprendizaje Social

Teorema 1. ***Teorema de Condorcet:***
Estado del mundo $\theta \in \{0,1\}$, equiprobables. N individuos deben tomar una decisión $x \in \{0,1\}$, con preferencias x = θ. Cada individuo recibe una señal s ∈ 0,1 con

$$Pr[s = 1|\theta = 1] = p, \qquad Pr[s = 0|\theta = 0] = p, \qquad p > \frac{1}{2}$$

Si los individuos se comunican libremente y $N \to \infty$, por Ley de Grandes Números, se identificará el estado correcto.

Ejemplo 4. ***Mercado laboral***

(a) En $t = 1$ la naturaleza escoge $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$.

(b) En $t = 2$ el trabajador escoge e conociendo θ.

(c) En $t = 3$ las firmas ofertan w_i, con $i = 1, 2$, conociendo e, pero no θ.

(d) En $t = 4$ el trabajador decide donde trabajar.

Este es un juego dinámico de información incompleta. La noción de equilibrio que vamos a usar es la idea de Equilibrio Bayesiano Perfecto Débil. Concreticemos un poco más:

- *Una estrategia para el trabajador es una función $e : \{\theta_L, \theta_H\} \to \mathbb{R}_+$.*
- *Una estrategia para la firma i es una función $w_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.*
- *La firma tiene una creencia sobre la productividad del trabajador, dada su creencia: $\mu(e) = \mathbb{P}(\theta = \theta_L|e)$, $\mu : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$.*

La noción de equilibrio va a imponer dos cosas:

- *Racionalidad. En el sentido de que las acciones deben ser óptimas:*

  Desde el punto de vista del trabajador: $\forall \theta, e(\theta)$ *es óptimo. Por otra parte, dado el sistema de creencias* μ, $w_i(e)$ *es óptimo para la firma* i.

- *Consistencia. La creencia debe derivarse de modo consistente dadas las acciones:*

  Es decir, $\forall \tilde{e}, \mu(\tilde{e})$ *se obtiene usando la* ***Regla de Bayes*** $\forall \tilde{e} \in \{e(\theta_L), e(\theta_H)\}$.

Dado el sistema de creencias, imponer optimalidad desde el punto de vista de las firmas, siempre lleva a que las firmas disipen las rentas y paguen la productividad esperada del trabajador.
Consideraremos dos nociones de equilibrio:

- *Diremos que* ***el equilibrio es de separación*** *si* $e(\theta_L) \neq e(\theta_H)$. *De esta manera, observando el esfuerzo es posible distinguir la productividad del trabajador.*

- *Diremos que* ***el equilibrio es de confusión*** *si* $e(\theta_L) = e(\theta_H)$. *De modo que la educación no permite identificar el tipo del trabajador.*

4. Riesgo Moral

Objetivo: Dado que hay acciones que no son contratables la idea es diseñar un contrato con el propósito de motivar que dichas acciones.

Definición 2. *El ambiente de este problema estará caracterizado por un agente y un principal de tal forma que*

- *Agente decide* $a \in A = \mathbb{R}_+$ *que no es verificable por el principal.*
- *Dada esta decición se genera un producto* $x \sim F(\cdot|a)$, *con sop*$\{F(\cdot|a)\} = [\underline{x}, \overline{x}]$
- *El agente tiene un costo* $\chi(a)$ *con* $\chi'(a) > 0$ *y* $\chi''(a) > 0$
- *Existe una compensación o salario* $w \in \mathbb{R}$ *del principal al agente.*
- *La utilidad del agente está definida como* $U^A(w,a) = u(w) - \chi(a)$ *de tal forma que* $u' > 0$ *y* $u'' < 0$
- *La utilidad del principal está definida como* $U^p(x,w) = x - w$

El problema que resuelve el principal es

$$\max_{w(\cdot),a} = \int (x - w(x)) f(x|a) dx$$

$$s.a$$

$$\int u(w(x)) f(x|a) dx - \chi(a) \geq 0 \qquad (RP)$$

$$a \in \arg\max_{a' \in A} \int u(w(x)) f(x|a') dx - \chi(a') \quad (RI)$$

Donde (RP) corresponde a la restricción de participación y (RI) a la restricción de incentivos.

Definición 3. *Suponiendo que el óptimo del problema (RI) es interior y la condición suficiente de optimalidad se cumple, podemos resolver el problema del principal descrito anteriormente mediante la* ***aproximación de primer orden*** *(FOA) de la restricción de incentivos, es decir, utilizando*

$$\int u(w(x))f_a(x|a)dx - \chi'(a)$$

Utilizando FOA y alicando el Lagrangeano al problema del principal se obtiene la siguiente condición de optimalidad

$$\frac{1}{u'(w(x))} = \lambda + \mu \frac{f_a(x|a)}{f(x|a)} \quad \forall x \tag{4}$$

donde λ y μ corresponden a los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (RP) y (RI) respectivamente.

Definición 4. *Diremos que f tienen razón de verosimilitud monótona (MLRP) si $\frac{f_a(x|a)}{f(x|a)}$ es creciente en x.*

Proposición 1. *Si se cumple MLRP y se tiene que $\mu > 0$, entonces $w(\cdot)$ es creciente en x.*

Proposición 2. *Si se cumple MLRP entonces $\mu > 0$.*

Para validar el FOA se deben tener alguna de las siguientes condiciones:

- $\forall a \in [0,1]$ $f(x|a) = af_1(x) + (1-a)f_2(x)$ con f_i densidad en $[\underline{x}, \overline{x}]$
- $F(x|\lambda a^1 + (1-\lambda)a^2) \leq \lambda F(x|a^1) + (1-\lambda)F(x|a^2)$

Definición 5. *Diremos que x es un* ***estadístico suficiente*** *para (x, y) con respecto a $a \in A$ si*

$$f(x, y|a) = g(x, y)h(x|a)$$

Definición 6. *Diremos que el agente tiene* ***responsabilidad limitada*** *(RLL) cuando este no puede transferir recursos al principal, es decir, cuando*

$$w(x) \geq 0$$

5. Teoría de emparejamientos

Consideramos un conjunto de hombres M, de forma que un hombre se representa por $m \in M$. Tenemos un conjunto de mujeres W, de forma que $w \in W$ representa una mujer. Cada uno de estos conjuntos es finito. Nos interesamos en emparejamientos 1 a 1, es decir, el caso en que cada hombre termina con, a lo más, una mujer y nos restringimos al caso de emparejamientos heterosexuales: hombres solo se emparejan con mujeres y mujeres se emparejan con hombres. Cada $m \in M$ tiene preferencias sobre $W \cup \{m\}$ donde $\{m\}$ representa la situación en que m queda sin pareja. Del mismo modo, $w \in W$ tiene preferencias sobre $M \cup \{w\}$, es decir $w \succ_m m$. Diremos que una mujer $w \in W$ es **aceptable** para $m \in M$ si prefiere w por sobre quedar sin pareja y análogamente definimos la noción de que un hombre m sea aceptable para una mujer w.

Definición 7. *Definimos un* ***emparejamiento (matching)*** *como un conjunto de pares, tal que cada individuo tiene, a lo más, una sola pareja.*

Definición 8. *Diremos que un matching $\mathcal{M}$ es* ***estable*** *si:*

(1) Cada individuo se empareja con otro que es aceptable de acuerdo a su relación de preferencias, y

(2) No existe un par (m, w) tal que ambos prefieren estar juntos por sobre la pareja que les asigna el matching.

Si el par (m, w) existiera, decimos que (m, w) es un par de bloqueo para el matching $\mathcal{M}$.

Definición 9. *Definimos el **Algoritmo de Aceptación Diferida (DA)** en la versión en que "los hombres se proponen" como sigue:*
Input: *Las relaciones de preferencias de cada grupo.*
Output: *Un Mathching.*
Algoritmo:

(a) Cada hombre $m \in M$ se propone a la mujer más alta de su ranking de preferencias.

*(b) Cada mujer $w \in W$ recibe estas postulaciones y se emparejan **tentativamente** con el hombre que prefieren dentro de los que se propusieron a ella. Rechazan al resto de los hombres (o los rechazan a todos si ninguno es aceptable).*

(c) Cada hombre rechazado remueve a la mujer que lo rechazó de su lista y se propone a la siguiente mujer, de acuerdo a su ranking de preferencias.

(d) El algoritmo continúa hasta que ningún hombre sea rechazado. El resultado del algoritmo es el matching tentativo en este punto.

El algoritmo cuando "las mujeres se proponen" es análogo y se obtiene intercambiando los roles de cada grupo.

Teorema 2. *El resultado de DA es un matching estable.*

Corolario 1. *Un matching estable siempre existe.*

Definición 10. *Diremos que un matching estable es **mujer-óptimo** si cada $w \in W$ prefiere a su pareja por sobre cualquier otra que podría tener en otro matching estable. Definimos de manera análoga el matching **hombre-óptimo**.*

Teorema 3. *Cuando los hombres se proponen, DA resulta en un matching hombre-óptimo. Cuando las mujeres se proponen, DA resulta en un matching mujer-óptimo.*

Definición 11. *Definimos el **Algoritmo del Dictador Serial (Serial Dictatorship)** cuando los hombres eligen como sigue:*
Input: *Las preferencias de los hombres y un orden total sobre M. Identificamos a $m_t \in M$ como el t-ésimo hombre.*
Output: *Un Matching.*
Algoritmo:

(a) En la primera ronda, el hombre m_1 elige a la mujer que prefiere dentro de todo el conjunto de mujeres. Esta mujer deja de estar disponible.

(b) En la ronda t el hombre m_t decide su pareja dentro de las disponibles. Es decir, dentro de las mujeres que no hayan sido previamente emparejados. Esta mujer deja de estar disponible.

(c) El algoritmo termina cuando el último hombre elige su pareja o cuando todas las mujeres ya han sido emparejados.

El algoritmo cuando las mujeres eligen se define de manera análoga.

Definición 12. *Definimos un **mecanismo de emparejamiento** μ como una función que transforma preferencias $(\succ_i)_{i \in M \cup W}$ en un matching $\mathcal{M}$.*

Definición 13. *Dado un mecanismo de emparejamiento, diremos que es* ***a prueba de estrategias*** *(strategy proof) si para cada participante es óptimo revelar sus preferencias, independientemente del reporte del resto de los participantes.*

Teorema 4. *El Algoritmo de Aceptación Diferida en que los hombres proponen es a prueba de estrategias para los hombres. De la misma forma, el algoritmo en que las mujeres proponen es a prueba de estrategias para las mujeres.*