

Auxiliar 6: Estrategias mixtas y juegos bayesianos

IN701 Microeconomía I

Leonel Huerta

7 de mayo de 2020

- 1 P1. Un juego sencillo
- 2 P2. Licitaciones con valoraciones conocidas
- 3 P3. Licitaciones con valoraciones privadas

1 P1. Un juego sencillo

2 P2. Licitaciones con valoraciones conocidas

3 P3. Licitaciones con valoraciones privadas

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 1: Busquemos funciones de mejores respuestas e intersectemos.

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 1: Busquemos funciones de mejores respuestas e intersectemos.

Digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 1: Busquemos funciones de mejores respuestas e intersectemos.

Digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

- Escribamos el pago esperado de 1:

$$\begin{aligned}u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= p(5q + (1 - q)) + (1 - p)(2q + 3(1 - q)) \\ &= p(5q - 2) + (3 - q)\end{aligned}$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 1: Busquemos funciones de mejores respuestas e intersectemos.

Digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

- Escribamos el pago esperado de 1:

$$\begin{aligned}u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= p(5q + (1 - q)) + (1 - p)(2q + 3(1 - q)) \\ &= p(5q - 2) + (3 - q)\end{aligned}$$

- Y entonces, la mejor respuesta de 1 debe entregar el valor de p tal que:

$$\max_{p \geq 0} p(5q - 2) + (3 - q)$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 1: Busquemos funciones de mejores respuestas e intersectemos.

Digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

- Escribamos el pago esperado de 1:

$$\begin{aligned}u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= p(5q + (1 - q)) + (1 - p)(2q + 3(1 - q)) \\ &= p(5q - 2) + (3 - q)\end{aligned}$$

- Y entonces, la mejor respuesta de 1 debe entregar el valor de p tal que:

$$\max_{p \geq 0} p(5q - 2) + (3 - q)$$

Notemos que esta función es lineal y el valor de p está acotado (en $[0, 1]$).

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 1: Busquemos funciones de mejores respuestas e intersectemos.

Digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

- Escribamos el pago esperado de 1:

$$\begin{aligned}u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= p(5q + (1 - q)) + (1 - p)(2q + 3(1 - q)) \\ &= p(5q - 2) + (3 - q)\end{aligned}$$

- Y entonces, la mejor respuesta de 1 debe entregar el valor de p tal que:

$$\max_{p \geq 0} p(5q - 2) + (3 - q)$$

Notemos que esta función es lineal y el valor de p está acotado (en $[0, 1]$).

- Con lo anterior, la correspondencia de mejor respuesta queda dada por:

$$BR_1(\sigma_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } q > \frac{2}{5} \\ (p, 1 - p), p \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{2}{5} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{2}{5} \end{cases}$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Y podemos replicar el procedimiento para el jugador 2:

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Y podemos replicar el procedimiento para el jugador 2:

- El pago de 2 viene dado por:

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Y podemos replicar el procedimiento para el jugador 2:

- El pago de 2 viene dado por:

$$\begin{aligned}u_2(\sigma_1, \sigma_2) &= q(2p + (1 - p)) + (1 - q)(3(1 - p)) \\&= q(4p - 2) + (3 - 3p)\end{aligned}$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Y podemos replicar el procedimiento para el jugador 2:

- El pago de 2 viene dado por:

$$\begin{aligned}u_2(\sigma_1, \sigma_2) &= q(2p + (1 - p)) + (1 - q)(3(1 - p)) \\ &= q(4p - 2) + (3 - 3p)\end{aligned}$$

- Con lo que el problema de optimización es:

$$\max_{q \geq 0} q(4p - 2) + (3 - 3p)$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Y podemos replicar el procedimiento para el jugador 2:

- El pago de 2 viene dado por:

$$\begin{aligned}u_2(\sigma_1, \sigma_2) &= q(2p + (1 - p)) + (1 - q)(3(1 - p)) \\ &= q(4p - 2) + (3 - 3p)\end{aligned}$$

- Con lo que el problema de optimización es:

$$\max_{q \geq 0} q(4p - 2) + (3 - 3p)$$

- Y sigue que la mejor respuesta de 2 es:

$$BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ (q, 1 - q), q \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hasta el momento tenemos:

$$BR_1(\sigma_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ (q, 1-q), q \in [0, 1] & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y con esto podemos encontrar los ENEM del juego!

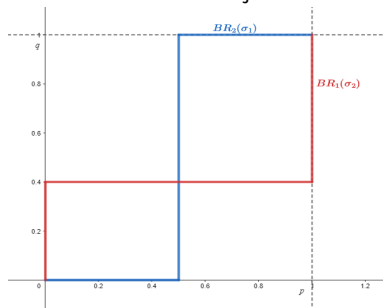
- Una opción es analizar analíticamente. Otra es dibujar:

Hasta el momento tenemos:

$$BR_1(\sigma_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ (q, 1-q), q \in [0, 1] & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y con esto podemos encontrar los ENEM del juego!

- Una opción es analizar analíticamente. Otra es dibujar:

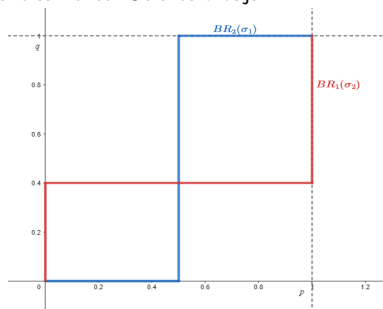


Hasta el momento tenemos:

$$BR_1(\sigma_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ (q, 1-q), q \in [0, 1] & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y con esto podemos encontrar los ENEM del juego!

- Una opción es analizar analíticamente. Otra es dibujar:



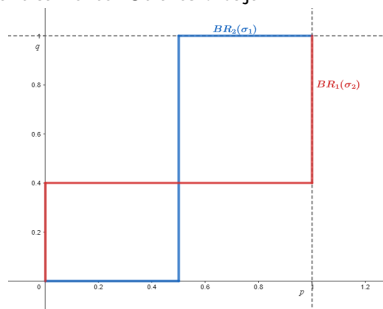
- De donde es fácil ver que hay 3 equilibrios. El primero cuando $p = q = 1$, el segundo cuando $p = \frac{1}{2}, q = \frac{2}{5}$ y el tercero con $p = q = 1$.

Hasta el momento tenemos:

$$BR_1(\sigma_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ (q, 1-q), q \in [0, 1] & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y con esto podemos encontrar los ENEM del juego!

- Una opción es analizar analíticamente. Otra es dibujar:



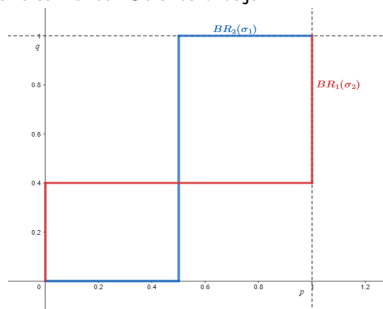
- De donde es fácil ver que hay 3 equilibrios. El primero cuando $p = q = 1$, el segundo cuando $p = \frac{1}{2}, q = \frac{2}{5}$ y el tercero con $p = q = 1$.
- Y los ENEM son entonces: $[(1, 0), (1, 0)], [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})], [(0, 1), (0, 1)]$.

Hasta el momento tenemos:

$$BR_1(\sigma_2) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1-p), p \in [0, 1] & \text{si } q = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases} \quad BR_2(\sigma_1) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{2} \\ (q, 1-q), q \in [0, 1] & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y con esto podemos encontrar los ENEM del juego!

- Una opción es analizar analíticamente. Otra es dibujar:



- De donde es fácil ver que hay 3 equilibrios. El primero cuando $p = q = 1$, el segundo cuando $p = \frac{1}{2}, q = \frac{2}{5}$ y el tercero con $p = q = 1$.
- Y los ENEM son entonces: $[(1, 0), (1, 0)], [(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})], [(0, 1), (0, 1)]$.

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Proposición: Si σ es un ENEM, y $s_i, s'_i \in \text{supp}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$, entonces:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$$

- Primero, encontramos rápidamente los EN: (U,L) y (D,R).

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Proposición: Si σ es un ENEM, y $s_i, s'_i \in \text{supp}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$, entonces:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$$

- Primero, encontramos rápidamente los EN: (U,L) y (D,R).
- Y busquemos un equilibrio en estrategias mixtas en que ambos jugadores pongan peso positivo en ambas estrategias.

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Proposición: Si σ es un ENEM, y $s_i, s'_i \in \text{supp}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$, entonces:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$$

- Primero, encontramos rápidamente los EN: (U,L) y (D,R).
- Y busquemos un equilibrio en estrategias mixtas en que ambos jugadores pongan peso positivo en ambas estrategias.
- Como antes, digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Proposición: Si σ es un ENEM, y $s_i, s'_i \in \text{supp}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$, entonces:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$$

- Primero, encontramos rápidamente los EN: (U,L) y (D,R).
- Y busquemos un equilibrio en estrategias mixtas en que ambos jugadores pongan peso positivo en ambas estrategias.
- Como antes, digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.
- La proposición para 1 nos dice que:

$$u_1(U, \sigma_2) = u_1(D, \sigma_2) \iff 5q + (1 - q) = 2q + 3(1 - q) \iff q = \frac{2}{5}$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Proposición: Si σ es un ENEM, y $s_i, s'_i \in \text{sop}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$, entonces:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$$

- Primero, encontramos rápidamente los EN: (U,L) y (D,R).
- Y busquemos un equilibrio en estrategias mixtas en que ambos jugadores pongan peso positivo en ambas estrategias.
- Como antes, digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1-p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1-q)$.
- La proposición para 1 nos dice que:

$$u_1(U, \sigma_2) = u_1(D, \sigma_2) \iff 5q + (1-q) = 2q + 3(1-q) \iff q = \frac{2}{5}$$

- Y análogamente, para el otro jugador:

$$u_2(L, \sigma_1) = u_2(R, \sigma_1) \iff 2p + (1-p) = 3(1-p) \iff p = \frac{1}{2}$$

Buscamos todos los ENEM del juego:

		J2	
		L	R
J1	U	5,2	1,0
	D	2,1	3,3

Método 2: Usar la caracterización de los ENEM:

Proposición: Si σ es un ENEM, y $s_i, s'_i \in \text{sop}(\sigma_i) = \{s_i \in S_i : \sigma_i(s_i) > 0\}$, entonces:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i})$$

- Primero, encontramos rápidamente los EN: (U,L) y (D,R).
- Y busquemos un equilibrio en estrategias mixtas en que ambos jugadores pongan peso positivo en ambas estrategias.
- Como antes, digamos que 1 juega la estrategia mixta $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ y 2 juega la estrategia $\sigma_2 = (q, 1 - q)$.
- La proposición para 1 nos dice que:

$$u_1(U, \sigma_2) = u_1(D, \sigma_2) \iff 5q + (1 - q) = 2q + 3(1 - q) \iff q = \frac{2}{5}$$

- Y análogamente, para el otro jugador:

$$u_2(L, \sigma_1) = u_2(R, \sigma_1) \iff 2p + (1 - p) = 3(1 - p) \iff p = \frac{1}{2}$$

1 P1. Un juego sencillo

2 P2. Licitaciones con valoraciones conocidas

3 P3. Licitaciones con valoraciones privadas

(a) Busquemos los EN de la licitación:

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

(a) Busquemos los EN de la licitación:

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Digamos que los jugadores juegan estrategias (b_1, b_2) en un EN. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El jugador i tiene incentivos a jugar $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon < b_i$

(a) Busquemos los EN de la licitación:

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Digamos que los jugadores juegan estrategias (b_1, b_2) en un EN. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El jugador i tiene incentivos a jugar $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon < b_i$
- $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
El pago es $\frac{1}{2}(v - b_i) < 0$ y jugar $\tilde{b}_i = v$ entrega pago 0.

(a) Busquemos los EN de la licitación:

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Digamos que los jugadores juegan estrategias (b_1, b_2) en un EN. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El jugador i tiene incentivos a jugar $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon < b_i$
- $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
El pago es $\frac{1}{2}(v - b_i) < 0$ y jugar $\tilde{b}_i = v$ entrega pago 0.
- $b_i = b_{-i} < v$ tampoco puede haber equilibrio:
Esta estrategia entrega pago $\frac{1}{2}(v - b_i)$ y el desvío $\tilde{b}_i = b_i + \varepsilon$ para ε arbitrariamente pequeño entrega pago $(v - b_i)$.

(a) Busquemos los EN de la licitación:

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Digamos que los jugadores juegan estrategias (b_1, b_2) en un EN. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El jugador i tiene incentivos a jugar $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon < b_i$
- $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
El pago es $\frac{1}{2}(v - b_i) < 0$ y jugar $\tilde{b}_i = v$ entrega pago 0.
- $b_i = b_{-i} < v$ tampoco puede haber equilibrio:
Esta estrategia entrega pago $\frac{1}{2}(v - b_i)$ y el desvío $\tilde{b}_i = b_i + \varepsilon$ para ε arbitrariamente pequeño entrega pago $(v - b_i)$.
- Solo nos queda el caso $b_i = b_i = v$:
En este caso la utilidad de ambos jugadores es 0. Cualquier desvío a $\tilde{b}_i < v$ sigue entregando pago nulo, mientras que cualquiera a $\tilde{b}_i > v$ entrega pago negativo.

(a) Busquemos los EN de la licitación:

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Digamos que los jugadores juegan estrategias (b_1, b_2) en un EN. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El jugador i tiene incentivos a jugar $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon < b_i$
- $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
El pago es $\frac{1}{2}(v - b_i) < 0$ y jugar $\tilde{b}_i = v$ entrega pago 0.
- $b_i = b_{-i} < v$ tampoco puede haber equilibrio:
Esta estrategia entrega pago $\frac{1}{2}(v - b_i)$ y el desvío $\tilde{b}_i = b_i + \varepsilon$ para ε arbitrariamente pequeño entrega pago $(v - b_i)$.
- Solo nos queda el caso $b_i = b_j = v$:
En este caso la utilidad de ambos jugadores es 0. Cualquier desvío a $\tilde{b}_i < v$ sigue entregando pago nulo, mientras que cualquiera a $\tilde{b}_i > v$ entrega pago negativo.

Se concluye que el único EN del juego es aquel en que ambos jugadores juegan exactamente su valoración por el bien y la utilidad del vendedor es justamente este valor.

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Supongamos que lo hubiera. Digamos (b_1, b_2) es un perfil de equilibrio. Notemos que:

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Supongamos que lo hubiera. Digamos (b_1, b_2) es un perfil de equilibrio. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:

El argumento es el mismo, el desvío $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon$ es tal que sigue ganando el bien, pero paga menos.

Luego $b_1 = b_2$.

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Supongamos que lo hubiera. Digamos (b_1, b_2) es un perfil de equilibrio. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El argumento es el mismo, el desvío $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon$ es tal que sigue ganando el bien, pero paga menos.
Luego $b_1 = b_2$.
- Si $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más los pagos para i son negativos y el desvío $\tilde{b} = 0$ entrega utilidad nula.

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Supongamos que lo hubiera. Digamos (b_1, b_2) es un perfil de equilibrio. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El argumento es el mismo, el desvío $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon$ es tal que sigue ganando el bien, pero paga menos.
Luego $b_1 = b_2$.
- Si $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más los pagos para i son negativos y el desvío $\tilde{b} = 0$ entrega utilidad nula.
- Si $b_i = b_{-i} < v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más, cualquier jugador tiene desvíos hacia una cantidad ligeramente más alta.

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Supongamos que lo hubiera. Digamos (b_1, b_2) es un perfil de equilibrio. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El argumento es el mismo, el desvío $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon$ es tal que sigue ganando el bien, pero paga menos.
Luego $b_1 = b_2$.
- Si $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más los pagos para i son negativos y el desvío $\tilde{b} = 0$ entrega utilidad nula.
- Si $b_i = b_{-i} < v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más, cualquier jugador tiene desvíos hacia una cantidad ligeramente más alta.
- Si $b_i = b_{-i} = v$, ahora tampoco hay equilibrio:
Producto de que acá se paga la oferta aún cuando no se lleve el bien. El pago de cualquier jugador es $-\frac{v}{2}$. El desvío $\tilde{b}_i = 0$ entrega utilidad nula.

(b) Veamos que no hay EN en la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Supongamos que lo hubiera. Digamos (b_1, b_2) es un perfil de equilibrio. Notemos que:

- Si $b_i > b_{-i}$, no puede ser haber equilibrio:
El argumento es el mismo, el desvío $\tilde{b}_i = b_{-i} + \varepsilon$ es tal que sigue ganando el bien, pero paga menos.
Luego $b_1 = b_2$.
- Si $b_i = b_{-i} > v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más los pagos para i son negativos y el desvío $\tilde{b} = 0$ entrega utilidad nula.
- Si $b_i = b_{-i} < v$, tampoco puede haber equilibrio:
Una vez más, cualquier jugador tiene desvíos hacia una cantidad ligeramente más alta.
- Si $b_i = b_{-i} = v$, ahora tampoco hay equilibrio:
Producto de que acá se paga la oferta aún cuando no se lleve el bien. El pago de cualquier jugador es $-\frac{v}{2}$. El desvío $\tilde{b}_i = 0$ entrega utilidad nula.

Se concluye que en este caso no puede haber EN.

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F : [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F : [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$u_i(b, F) = (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b)$$

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \end{aligned}$$

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)F(b) - b(1 - F(b)) \end{aligned}$$

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)F(b) - b(1 - F(b)) \end{aligned}$$

- Si evaluamos esta expresión en $b = v$ se obtiene que: $u_i(b, F) = 0$.

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)F(b) - b(1 - F(b)) \end{aligned}$$

- Si evaluamos esta expresión en $b = v$ se obtiene que: $u_i(b, F) = 0$.
- Usando la ecuación anterior se obtiene que:

$$F(b) = \frac{b}{v}$$

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)F(b) - b(1 - F(b)) \end{aligned}$$

- Si evaluamos esta expresión en $b = v$ se obtiene que: $u_i(b, F) = 0$.
- Usando la ecuación anterior se obtiene que:

$$F(b) = \frac{b}{v}$$

- Y como F es una distribución $F(c) = 0$, por lo que $c = 0$.

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)F(b) - b(1 - F(b)) \end{aligned}$$

- Si evaluamos esta expresión en $b = v$ se obtiene que: $u_i(b, F) = 0$.
- Usando la ecuación anterior se obtiene que:

$$F(b) = \frac{b}{v}$$

- Y como F es una distribución $F(c) = 0$, por lo que $c = 0$.

Sigue que el par de estrategias mixtas (F, F) conforma ENEM y que la recaudación del vendedor viene dada por:

$$2 \int_0^v \frac{x}{v} dx = v$$

(c) Busquemos un ENEM de la licitación:

Todos pagan. Los participantes ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien, pero si paga su oferta.

Busquemos un equilibrio simétrico, en que ambos jugadores juegan de acuerdo a una distribución $F: [c, v] \rightarrow [0, 1]$ continua, con c algún valor por determinar.

- Como el soporte de F es $[c, v]$, en equilibrio debe tenerse que:

$$u_i(b, F) = u_i(v, F), \forall b \in [c, v]$$

- Calculemos:

$$\begin{aligned} u_i(b, F) &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) + \left(\frac{v}{2} - b\right)\mathbb{P}(b_{-i} = b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)\mathbb{P}(b_{-i} < b) - b\mathbb{P}(b_{-i} > b) \\ &= (v - b)F(b) - b(1 - F(b)) \end{aligned}$$

- Si evaluamos esta expresión en $b = v$ se obtiene que: $u_i(b, F) = 0$.
- Usando la ecuación anterior se obtiene que:

$$F(b) = \frac{b}{v}$$

- Y como F es una distribución $F(c) = 0$, por lo que $c = 0$.

Sigue que el par de estrategias mixtas (F, F) conforma ENEM y que la recaudación del vendedor viene dada por:

$$2 \int_0^v \frac{x}{v} dx = v$$

1 P1. Un juego sencillo

2 P2. Licitaciones con valoraciones conocidas

3 P3. Licitaciones con valoraciones privadas

(a) Describamos la licitación como un juego bayesiano

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Siempre que queramos definir un juego con información incompleta (bayesiano) debemos describir las mismas 5 cosas:

(a) Describamos la licitación como un juego bayesiano

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Siempre que queramos definir un juego con información incompleta (bayesiano) debemos describir las mismas 5 cosas:

- **Conjunto de jugadores:** Los dos participantes de la subasta: $I = \{1, 2\}$.

(a) Describamos la licitación como un juego bayesiano

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Siempre que queramos definir un juego con información incompleta (bayesiano) debemos describir las mismas 5 cosas:

- **Conjunto de jugadores:** I . Los dos participantes de la subasta: $I = \{1, 2\}$.
- **Conjuntos de acciones:** $(S_i)_{i \in I}$. El espacio de posibles apuestas corresponde a los reales no negativos: $S_i = \mathbb{R}_+$.

(a) Describamos la licitación como un juego bayesiano

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Siempre que queramos definir un juego con información incompleta (bayesiano) debemos describir las mismas 5 cosas:

- **Conjunto de jugadores:** I . Los dos participantes de la subasta: $I = \{1, 2\}$.
- **Conjuntos de acciones:** $(S_i)_{i \in I}$. El espacio de posibles apuestas corresponde a los reales no negativos: $S_i = \mathbb{R}_+$.
- **Conjuntos de tipos:** $(\Theta_i)_{i \in I}$. Los tipos de los jugadores quedan definidos por su valoración por el bien: $\Theta_i = [0, 1]$.

(a) Describamos la licitación como un juego bayesiano

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Siempre que queramos definir un juego con información incompleta (bayesiano) debemos describir las mismas 5 cosas:

- **Conjunto de jugadores:** I . Los dos participantes de la subasta: $I = \{1, 2\}$.
- **Conjuntos de acciones:** $(S_i)_{i \in I}$. El espacio de posibles apuestas corresponde a los reales no negativos: $S_i = \mathbb{R}_+$.
- **Conjuntos de tipos:** $(\Theta_i)_{i \in I}$. Los tipos de los jugadores quedan definidos por su valoración por el bien: $\Theta_i = [0, 1]$.
- **Distribución de probabilidad sobre los tipos:** P . Para cada jugador, la valoración distribuye a partir de una uniforme $[0, 1]$.

(a) Describamos la licitación como un juego bayesiano

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Siempre que queramos definir un juego con información incompleta (bayesiano) debemos describir las mismas 5 cosas:

- **Conjunto de jugadores:** I . Los dos participantes de la subasta: $I = \{1, 2\}$.
- **Conjuntos de acciones:** $(S_i)_{i \in I}$. El espacio de posibles apuestas corresponde a los reales no negativos: $S_i = \mathbb{R}_+$.
- **Conjuntos de tipos:** $(\Theta_i)_{i \in I}$. Los tipos de los jugadores quedan definidos por su valoración por el bien: $\Theta_i = [0, 1]$.
- **Distribución de probabilidad sobre los tipos:** P . Para cada jugador, la valoración distribuye a partir de una uniforme $[0, 1]$.
- **Funciones de utilidad:** $u_i(s, \theta)$. En este caso el **juego tiene valores privados** y la utilidad de cada jugador viene dada por:

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

Donde denotamos b_i a la apuesta del jugador i .

(b) Busquemos el EB del juego.

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

- Busquemos un equilibrio simétrico. Es decir, una función que mapea desde el espacio de tipos en el espacio de estrategias. En equilibrio, cuando ambos jugadores juegan de acuerdo a esta función, ninguno debe tener incentivos al desvío.

(b) Busquemos el EB del juego.

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

- Busquemos un equilibrio simétrico. Es decir, una función que mapea desde el espacio de tipos en el espacio de estrategias. En equilibrio, cuando ambos jugadores juegan de acuerdo a esta función, ninguno debe tener incentivos al desvío.
- Supongamos que esta función σ es creciente, invertible, diferenciable y tal que $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

(b) Busquemos el EB del juego.

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

- Busquemos un equilibrio simétrico. Es decir, una función que mapea desde el espacio de tipos en el espacio de estrategias. En equilibrio, cuando ambos jugadores juegan de acuerdo a esta función, ninguno debe tener incentivos al desvío.
- Supongamos que esta función σ es creciente, invertible, diferenciable y tal que $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- De la caracterización para los EB, sabemos que si esta función es de equilibrio, debe ser tal que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$

(b) Busquemos el EB del juego.

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

- Busquemos un equilibrio simétrico. Es decir, una función que mapea desde el espacio de tipos en el espacio de estrategias. En equilibrio, cuando ambos jugadores juegan de acuerdo a esta función, ninguno debe tener incentivos al desvío.
- Supongamos que esta función σ es creciente, invertible, diferenciable y tal que $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- De la caracterización para los EB, sabemos que si esta función es de equilibrio, debe ser tal que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$

- Pero esta esperanza es fácil de calcular pues $v_j \sim U[0, 1]$:

$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^1 u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) dv_j$$

(b) Busquemos el EB del juego.

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

- Busquemos un equilibrio simétrico. Es decir, una función que mapea desde el espacio de tipos en el espacio de estrategias. En equilibrio, cuando ambos jugadores juegan de acuerdo a esta función, ninguno debe tener incentivos al desvío.
- Supongamos que esta función σ es creciente, invertible, diferenciable y tal que $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- De la caracterización para los EB, sabemos que si esta función es de equilibrio, debe ser tal que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$

- Pero esta esperanza es fácil de calcular pues $v_j \sim U[0, 1]$:

$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^1 u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) dv_j$$

Además, como σ es invertible y creciente:

$$b_i > \sigma(v_j) \iff \sigma^{-1}(b_i) > v_j$$

Y entonces:

(b) Busquemos el EB del juego.

$$u_i(b_i, b_j, v_i) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

- Busquemos un equilibrio simétrico. Es decir, una función que mapea desde el espacio de tipos en el espacio de estrategias. En equilibrio, cuando ambos jugadores juegan de acuerdo a esta función, ninguno debe tener incentivos al desvío.
- Supongamos que esta función σ es creciente, invertible, diferenciable y tal que $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
- De la caracterización para los EB, sabemos que si esta función es de equilibrio, debe ser tal que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$

- Pero esta esperanza es fácil de calcular pues $v_j \sim U[0, 1]$:

$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^1 u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) dv_j$$

Además, como σ es invertible y creciente:

$$b_i > \sigma(v_j) \iff \sigma^{-1}(b_i) > v_j$$

Y entonces:

$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^{\sigma^{-1}(b_i)} (v_i - \sigma(v_j)) dv_j + \underbrace{\int_{\sigma^{-1}(b_i)}^{\sigma^{-1}(b_i)} \frac{(v_i - \sigma(v_j))}{2} dv_j}_0 + \underbrace{\int_{\sigma^{-1}(b_i)}^1 0 dv_j}_0$$

Teníamos entonces que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$
$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^{\sigma^{-1}(b_i)} (v_i - \sigma(v_j)) dv_j$$

- La condición de primer orden es que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]}{\partial b_i} = 0$$

Teníamos entonces que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$
$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^{\sigma^{-1}(b_i)} (v_i - \sigma(v_j)) dv_j$$

- La condición de primer orden es que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]}{\partial b_i} = 0$$

- Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$(\sigma^{-1}(b_i))'(v_i - \sigma(\sigma^{-1}(b_i))) = 0$$

Teníamos entonces que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$
$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^{\sigma^{-1}(b_i)} (v_i - \sigma(v_j)) dv_j$$

- La condición de primer orden es que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]}{\partial b_i} = 0$$

- Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$(\sigma^{-1}(b_i))'(v_i - \sigma(\sigma^{-1}(b_i))) = 0$$

- Como σ es invertible, se obtiene que entonces: $v_i = b_i$.

Teníamos entonces que:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \in S_i} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]$$
$$\mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i] = \int_0^{\sigma^{-1}(b_i)} (v_i - \sigma(v_j)) dv_j$$

- La condición de primer orden es que:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i) | v_i]}{\partial b_i} = 0$$

- Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$(\sigma^{-1}(b_i))'(v_i - \sigma(\sigma^{-1}(b_i))) = 0$$

- Como σ es invertible, se obtiene que entonces: $v_i = b_i$.
- Sigue que el par (σ, σ) con $\sigma(v_i) = v_i$ conforma un EB del juego.

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

Primer precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ dada por $\sigma(v) = \frac{v}{2}$.

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

Primer precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ dada por $\sigma(v) = \frac{v}{2}$.

Segundo precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\sigma(v) = v$.

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

Primer precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ dada por $\sigma(v) = \frac{v}{2}$.

Segundo precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\sigma(v) = v$.

- ¿Qué nos dicen estas estrategias?

Primer precio: los participantes **esconden parte de su valoración**.

Segundo precio: los participantes **revelan exactamente su valoración**.

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

Primer precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ dada por $\sigma(v) = \frac{v}{2}$.

Segundo precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\sigma(v) = v$.

- ¿Qué nos dicen estas estrategias?

Primer precio: los participantes **esconden parte de su valoración**.

Segundo precio: los participantes **revelan exactamente su valoración**.

- ¿Qué pasa con la eficiencia?

Notar que en ambos casos los equilibrios son **eficientes**: quién tiene mayor valoración por el bien es quien se lo lleva en equilibrio.

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

Primer precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ dada por $\sigma(v) = \frac{v}{2}$.

Segundo precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\sigma(v) = v$.

- ¿Qué nos dicen estas estrategias?

Primer precio: los participantes **esconden parte de su valoración**.

Segundo precio: los participantes **revelan exactamente su valoración**.

- ¿Qué pasa con la eficiencia?

Notar que en ambos casos los equilibrios son **eficientes**: quién tiene mayor valoración por el bien es quien se lo lleva en equilibrio.

- ¿Qué ocurre con los excedentes?

En ambos casos, quién se lleva el bien termina con excedente (paga bajo su valoración). Los agentes tienen **poder de mercado**. ¿Qué pasa si hubieran más jugadores?

(c) Comparemos con el resultado visto en clases.

Primer precio: Los participantes simultáneamente ofrecen sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien y paga su oferta. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

Segundo precio: Los participantes ofrecen simultáneamente sumas $b_i \geq 0$. El ganador es el participante con la mayor oferta, que obtiene el bien, pero paga la oferta del perdedor. El otro participante no obtiene el bien y no paga nada.

- Las estrategias de equilibrio que encontramos eran:

Primer precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, \frac{1}{2}]$ dada por $\sigma(v) = \frac{v}{2}$.

Segundo precio: $\sigma(v) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $\sigma(v) = v$.

- ¿Qué nos dicen estas estrategias?

Primer precio: los participantes **esconden parte de su valoración**.

Segundo precio: los participantes **revelan exactamente su valoración**.

- ¿Qué pasa con la eficiencia?

Notar que en ambos casos los equilibrios son **eficientes**: quién tiene mayor valoración por el bien es quien se lo lleva en equilibrio.

- ¿Qué ocurre con los excedentes?

En ambos casos, quién se lleva el bien termina con excedente (paga bajo su valoración). Los agentes tienen **poder de mercado**. ¿Qué pasa si hubieran más jugadores?

- ¿Qué pasa con el ingreso del subastador?

Primer precio: $I = \mathbb{E} \left[\max \left\{ \frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2} \right\} \right] = \frac{1}{3}$

Segundo precio: $I = \mathbb{E} [\min \{v_1, v_2\}] = \frac{1}{3}$