Microeconomía I

Auxiliar Pre-Examen

Profesor: Juan Escobar
Auxiliar: Rafael Tiara

MAGÍSTER EN ECONOMÍA APLICADA

Contents

Enunciado

P3. Examen 2016 Dos firmas compiten fijando precios $p_i \in [0,1]$ de manera simultánea. Las firmas tienen costos marginales iguales a 0 y la demanda de la firma i es $1 - p_i + p_j$. Las utilidades de la firma i son $\pi(p_i, p_j) = p_i(1 - p_i + p_j)$.

a. Encuentre la mejor respuesta, $B_i\left(p_j\right)$, de la firma 1 a m precio p.

   Respuesta:

   - Bienes son sustitutos.
   - Problema es equivalente a competencia en cantidades con función de utilidad:

$$q_i(1 - q_i - q_j)$$

Respuesta:

Dado $p_j \in [0, 1]$, la firma i escoge p_i, a modo de maximizar:

$$U_{(P_i)} = p_i \left(1 - p_k + p_j\right)$$

CPO:

$$\frac{dU(p_i)}{dp_i} \Rightarrow p_i^* := \frac{1 + p_j}{2}$$

Luego, la función de mejor respuesta de la firma i queda determinada por:

$$BR_i\left(p_j\right) = \frac{1 + p_j}{2}.$$

P3.b

b. Encuentre el EN.
Respuesta:
Usando las funciones de mejor respuesta encontradas en la parte anterior, es fácil encontrar un EN simétrico. Basta imponer que:

$$p^* = p_i = p_j = BR_i\left(p_j\right) = BR_j\left(p_i\right)$$

Sabemos que un precio que satisfaga la condición anterior será de equilibrio, pues ambos jugadores se encuentran jugando su mejor respuesta a la estrategia del rival. Se obtiene que:

$$p = \frac{1+p}{2} \Longleftrightarrow p^* = 1$$

Y se concluye que el par (1, 1) conforma un EN.

P3.c

c. Suponiendo que $p_j \geq \overline{p_j}$, muestre que $p_i < B_i\left(\bar{p}_j\right)$ está estrictamente dominado.
Respuesta:

Intuición: Dado que los bienes son sustitutos y que el rival juega un precio mayor a cierto nivel de referencia, entonces a i no le conviene fijar su precio por debajo de $BR_i(p_j)$. Esto es debido a que la función de mejor respuesta $BR_i(p_j)$ es creciente en p_j. En particular, dado $p_j \geq \overline{p_j} \Rightarrow BR_i(p_j) \geq B_i\left(\bar{p}_j\right)$, debido a que $BR(p)$ es una función biyectiva monótonamente creciente en p.

Gracias a la parte (a), sabemos que cuando la firma rival fija $\bar{p}_j$, las utilidades de la firma i son estrictamente mayores cuando juega su mejor respuesta que cuando juega cualquier otro precio, es decir, $\forall p_i \in [0,1]$:

$$BR_i\left(\bar{p}j\right)\left(1 - BR_i\left(\bar{p}_j\right) + \bar{p}_j\right) > p_i\left(1 - p_i + \bar{p}_j\right)$$

Por otra parte, para $p_i < BR_i\left(\bar{p}_j\right)$. Como $p_j \geq \bar{p_j}$, entonces:

$$BR_i\left(\bar{p}_j\right)\left(p_j - \bar{p}_j\right) \geq p_i\left(p_j - \bar{p}_j\right)$$

Sumando (5) y (6) se obtiene que

$$BR_i\left(p_j\right)\left(1 - BR_i\left(\bar{p}_j\right) + p_j\right) > p_i\left(1 - p_i + p_j\right)$$

$$\Longleftrightarrow \pi_i\left(BR_i\left(\bar{p}_j\right), p_j\right) > \pi_i\left(p_i, p_j\right)$$

Con lo que se concluye lo pedido.

d. Tiene el juego de EIEED?

Respuesta:

La respuesta es afirmativa. Realicemos EIEED:

1. Sea $\bar{p}_j := 0$. Entonces, $BR_i\left(\bar{p}_j\right) = \frac{1}{2}$ y $p_j \geq \bar{p}_j$. Gracias a la parte anterior, todos los precios en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ estan estrictamente dominados para el jugador i. Luego, podemos reducir el espacio de estrategias de i a $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. De manera análoga, también podemos hacerlo para el jugador j.
2. Consideremos ahora $\bar{p}_j := \frac{1}{2}$. Entonces, $BR_i\left(\bar{p}_2\right) = \frac{3}{4}$ y $p_j \geq \bar{p}_j$. Nuevamente, gracias a la parte anterior. podemos reducir el espacio de estrategias de i a $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ y análogamente para el jugador j.
3. Sea ahora $\bar{p}_j := \frac{3}{4}$. Luego, $BR_i\left(\bar{p}_j\right) = \frac{7}{8}$. Argumentando igual que antes, podemos reducir el espacio de precios a $\left[\frac{7}{8}, 1\right]$

Aplicando sucesivamente el argumento anterior, en la fase n-ésima de la eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas, reducimos el espacio de estrategias a $\left[1 - \frac{1}{2}^{n}, 1\right]$.
Tomando $n \to \infty$ se obtiene que la solución por EIEED del juego es que ambas firmas fijen $p = 1$ y se recupera el EN encontrado en la parte (b).

P5 Examen 2016 Un monopolista ofrece seguro contra incendios a un cliente. El cliente tiene una riqueza W y en caso de incendio tiene una pérdida $L \in]0, W[$. La probabilidad de incendio es $p \in]0, 1[$. El monopolista ofrece un seguro a precio q que paga R en caso de incendio. De este modo la utilidad del comprador es:

$$pu(W - q - L + R) + (1 - p)u(W - q)$$

con $u' > 0$ y $u'' < 0$. La utilidad del monopolista es su ingreso menos el costo esperado $q - pR$. El monopolista ofrece un contrato (q, R) al cliente. El cliente puede aceptar el contrato (q, R) o rechazarlo (y quedarse sin seguro, o con un contrato $(0, 0)$).

P5.a

a. Plantee el problema de maximización del monopolista que decide (q, R) de manera de maximizar su utilidad, sujeto a la restricción de que el cliente esté mejor con el seguro (q, R) que sin seguro (0 , 0).

Respuesta: *El monopolista debe fijar un precio* q *y un pago* R *tal que maximiza sus utilidades y el cliente está dispuesto a participar.*
El monopolista resuelve:

$$\max_{q,R\geq 0} \quad q - pR$$

$$s.a. \quad pu(W - q - L + R) + (1 - p)u(W - q) \geq pu(W - L) + (1 - p)u(W)$$

P5.b

b. Muestre que el cliente termina completamente asegurado: $W - q - L + R = W - q$. Explique intuitivamente este resultado.

Denotamos la utilidad de reserva $\underline{u} \equiv pu(W - L) + (1 - p)u(W)$. (Notar que no depende de (q, R).)
El problema queda:

$$\max_{q,R \geq 0} \quad q - pR$$

$$s.a. \quad pu(W - q - L + R) + (1 - p)u(W - q) - \underline{u} \geq 0$$

Condiciones de KKT implican:

$$-1 + \lambda[pu'(W - q - L + R) + (1 - p)u'(W - q)] = 0 \tag{1}$$

$$p - \lambda pu'(W - q - L + R) = 0 \tag{2}$$

$$\lambda[pu(W - q - L + R) + (1 - p)u(W - q)] = 0 \tag{3}$$

El monopolista está maximizando utilidades cuando el cliente no tiene excedente. Así, (RP) se cumple con igualdad y $\lambda \neq 0$. Luego, (2) implica:

$$u'(W - q - L + R) = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

Reemplazando (4) en (1):

$$-1 + \lambda(p\frac{1}{\lambda} + (1 - p)up(W - q)) = 0 \iff u'(W - q) = \frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

Así, (4) = (5) $\Rightarrow$:

$$u'(W - q - L + R) = u'(W - q) \tag{6}$$

Como u es estrictamente creciente $\Rightarrow$:

$$W - q - L + R = W - q \Rightarrow R - L = 0$$

Esto implica que:

- $R = L$

Es decir, el cliente termina totalmente asegurado.

Intuición:

- El monopolista es neutro al riesgo, mientras que el cliente es averso. Esto se deriva de las funciones de utilidad: la utilidad del monopolista es lineal en (q, R) mientras que la del cliente es cóncava en su riqueza neta, por lo tanto, para este último el valor esperado de cualquier lotería que no pague lo mismo en todos los estados de la naturaleza siempre es estrictamente mayor que su equivalente cierto.
- El monopolio termina llevándose todo el riesgo y dejando al cliente con su utilidad de reserva, pagándole la menor diferencia posible en caso de incendio que de no incendio, es decir, dejándolo indiferente entre ambos casos.

c. Suponga ahora que el monopolista no conoce p. Desde la perspectiva del monopolio, p puede tomar dos valores $p_L < p_H$ con $\mathbb{P}[p = p_L] = \alpha \in]0,1[$. El cliente sí conoce p. Plantee el problema de diseño de contrato (q, R) óptimo para el monopolista sujeto a que el cliente, independiente de su probabilidad de pérdida, participe. Se asegura completamente el cliente? Qué rol tiene la asimetría de información en este contrato? Explique.

Respuesta: Ahora el monopolista escoge q y R a modo de maximizar su utilidad esperada:

$$\mathbb{E}[q - pR] = q - \alpha p_L R - (1-\alpha) p_H R$$

Sujeto a que participen los clientes riesgosos:

$$p_H u(W - q - L + R) + (1 - p_H)\, u(W - q) \geq p_H u(W - L) + (1 - p_H)\, u(W)$$

Y los no riesgosos:

$$p_L u(W - q - L + R) + (1 - p_L)\, u(W - q) \geq p_L u(W - L) + (1 - p_L)\, u(W)$$

Definiendo:

$$I \equiv W - q - L + R, \quad N \equiv W - q$$
$$u_H \equiv p_H u(W - L) + (1 - p_H)\, u(W)$$
$$u_L \equiv p_L u(W - L) + (1 - p_L)\, u(W)$$

De las condiciones de KKT:

$$-1 + \lambda_H p_H u'(I) + \lambda_H \left(1 - p_H\right) u'(N) + \lambda_L p_L u'(I) + \lambda_L \left(1 - p_L\right) u'(N) = 0 \tag{7}$$

$$\alpha p_L + (1 - \alpha) p_H - \lambda_H p_H u'(I) - \lambda_L p_L u'(I) = 0 \tag{8}$$

$$\lambda_H \left(u_H - p_H u(I) - (1 - p_H)\, u(N)\right) = 0 \tag{9}$$

$$\lambda_L \left(u_L - p_L u(I) - (1 - p_L)\, u(N)\right) = 0 \tag{10}$$

Cuando $\lambda_L + \lambda_H \neq 0$, la ecuación (8) es equivalente a:

$$u'(I) = \frac{\alpha p_L + (1 - \alpha) p_H}{\lambda_H p_H + \lambda_L p_L} \tag{11}$$

Usando (11) en (7) tenemos que:

$$u'(N) = \frac{1 - \left(\alpha p_L + (1 - \alpha) p_H\right)}{\lambda_H \left(1 - p_H\right) + \lambda_L \left(1 - p_L\right)} \tag{12}$$

A partir de aquí, suponemos que el cliente se asegura completamente, es decir, N = I.

$$u'(N) = u'(I)$$

$$\begin{aligned}
\iff \quad & \alpha\lambda_H p_H + (1-\alpha)\lambda_L p_L = \alpha\lambda_H p_L + (1-\alpha)\lambda_L p_H \\
\iff \quad & \alpha_H\left(p_H - p_L\right) = (1-\alpha)\lambda_L\left(p_H - p_L\right) \\
\iff \quad & \alpha\lambda_H = (1-\alpha)\lambda_L. \qquad (13)
\end{aligned}$$

De (13) es posible notar que, dado que $1 > \alpha > 0$, entonces $\lambda_H, \lambda_L \neq 0$, por lo que ambas restricciones de participación se cumplen con igualdad. Así:

$$\begin{aligned}
u_L &= p_L u(I) + (1-p_L)\, u(N) \\
u_H &= p_H u(I) + (1-p_H)\, u(N)
\end{aligned}$$

suponiendo que $N = I$, lo anterior implica que:

$$\begin{aligned}
u_H = u_L &\iff p_H u(W-L) + (1-p_H)\, u(W) = p_L u(W-L) + (1-p_L)\, u(W) \\
&\iff (p_H - p_L)\, u(W-L) - (p_H - p_L)\, u(W) = 0 \\
&\iff u(W-L) = u(W)
\end{aligned}$$

$u(W - L) = u(W)$ es una contradicción, pues u es estrictamente creciente y $L > 0$.

Se concluye que el cliente no puede asegurarse completamente en este caso.

Lo que ocurre ahora es que el monopolio ya no puede discriminar perfectamente al cliente que tiene enfrente. Como el contrato que genera el monopolista debe ser tal que ambos tipos de clientes lo acepten, la asimetría de información hace que el lado de la demanda recupere poder de mercado, que el aseguramiento no sea completo y que ahora los consumidores terminen con excedente, en contraste con lo que ocurría en la parte anterior.