

Auxiliar 12

Profesor: Juan Escobar
Auxiliares: Leonel Huerta, Javier Moreno & Rafael Tiara

Problemas

P1. Considere el célebre algoritmo de Aceptación Diferida (estudiantes proponen) en su versión para emparejar estudiantes con universidades:

- *Paso 1:* Cada estudiante se propone a la universidad de su primera preferencia. Cada universidad asigna tentativamente sus cupos a los estudiantes que se le proponen, uno a la vez, respetando su orden de prioridad. Decimos que un estudiante es rechazado en este paso si no es asignado a la universidad donde que se propuso.
- *Paso t :* Cada estudiante que fuera rechazado en el paso anterior se propone a la universidad de su siguiente preferencia, si quedara alguna. Cada universidad considera los estudiantes que se le proponen en este paso junto con los que ya hubiera aceptado y asigna tentativamente sus cupos, uno a la vez, respetando su orden de prioridad. Decimos que un estudiante es rechazado en este paso si no es asignado tentativamente a alguna universidad.
- El algoritmo termina si en algún paso ningún estudiante es rechazado. Cada estudiante se asigna definitivamente a la universidad donde estuviera tentativamente aceptado.

Considere además un problema con 4 estudiantes (s_1, s_2, s_3, s_4) y 4 universidades (A, B, C, D). Cada universidad tiene un único cupo y las preferencias de los estudiantes vienen dadas por:

$$s_1 : B \succ_{s_1} A \succ_{s_1} C \succ_{s_1} D, \quad s_2 : A \succ_{s_2} B \succ_{s_2} C, \quad s_3 : A \succ_{s_3} B \succ_{s_3} D \succ_{s_3} C, \quad s_4 : D \succ_{s_4} C \succ_{s_4} B$$

Note que la universidad D no es aceptable para el estudiante s_2 , mientras que A no es aceptable para s_4 . Por su parte, las universidades tienen órdenes de prioridad dados por:

$$A : s_1 - s_3 - s_2 - s_4, \quad B : s_2 - s_1 - s_3 - s_4, \quad C : s_2 - s_1 - s_3 - s_4, \quad D : s_1 - s_2 - s_3 - s_4$$

- Encuentre el matching que resulta de aplicar DA (estudiantes proponen) cuando los estudiantes declaran sus verdaderas preferencias.
- Muestre que en el matching que encontró en la parte anterior, hay estudiantes a los que les gustaría cambiar su asignación.

Considere ahora el siguiente algoritmo de asignación conocido como el Mecanismo de Boston:

- *Paso 1:* Para cada universidad, considere los estudiantes que lo listaron como su primera preferencia. Asigne los cupos, siguiendo el orden de prioridad, hasta que no queden cupos o hasta que no queden estudiantes que la hayan listado como su primera preferencia.
- *Paso t :* Considere solo los estudiantes que aún quedan sin asignación. Para cada universidad que todavía cuente con cupos, considere los estudiantes que la listaron como su t -ésima preferencia. Asigne estudiantes, respetando el orden de prioridad, hasta que no queden cupos o hasta que no queden estudiantes que la hayan listado como su t -ésima preferencia.

- *El algoritmo termina cuando cada estudiante se encuentre asignado a una universidad o cuando ya se han considerado todas las preferencias de los estudiantes.*
 - (c) Encuentre el matching que resulta de aplicar el Mecanismo de Boston, cuando los estudiantes declaran sus verdaderas preferencias.
 - (d) Muestre que cuando 3 de los estudiantes declaran sus verdaderas preferencias, el cuarto podría tener incentivos a falsear las suyas. ¿Qué ocurre en DA si los mismos 3 estudiantes declaran sus verdaderas preferencias y el cuarto falsea las suyas?
- P2.** Considere un problema de asignación de 3 estudiantes s_1, s_2 y s_3 a 3 colegios A, B y C . Los estudiantes tienen preferencias dadas por:

$$s_1 : A \succ_{s_1} B \succ_{s_1} C, \quad s_2 : A \succ_{s_2} B \succ_{s_2} C, \quad s_3 : B \succ_{s_3} A \succ_{s_3} C$$

Sin embargo, la ley prohíbe que los colegios establezcan órdenes de prioridad sobre los estudiantes, de forma que los colegios no tienen preferencias sobre los estudiantes. El Ministerio de Educación pretende usar el algoritmo de Aceptación Diferida para emparejar estudiantes con colegios y evalúa dos posibles alternativas para poder ejecutar el algoritmo:

- Ordenar aleatoriamente a todos los estudiantes una única vez y utilizar el resultado de esta lotería para establecer órdenes en cada colegio.
 - Ordenar aleatoriamente a todos los estudiantes, de forma distinta en cada colegio, y utilizar el resultado de estas tres loterías para establecer órdenes en cada colegio.
- (a) Encuentre todos los posibles emparejamientos que se pueden obtener con la primera alternativa. ¿Son todos estos resultados eficientes para los estudiantes?
- (b) Muestre que el resultado que se obtiene utilizando la segunda alternativa podría ser ineficiente para los estudiantes.
- (c) ¿Qué alternativa le recomendaría al Ministerio de Educación? ¿Qué podría ocurrir si hay más colegios y muchos más estudiantes? ¿Si los colegios tienen más de un cupo? ¿Y si los estudiantes no rankean a todos los colegios del sistema? Discuta.