Auxiliar 10: Diseño de Mecanismos

IN701 Microeconomía I

Leonel Huerta

15 de junio de 2020

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0, 1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.
  Si vende a precio p, las ganancias esperadas del vendedor son:

$$\mathbb{E}(u_v) = p\mathbb{P}(v_i > p) = p(1 - F(p))$$

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.
  Si vende a precio p, las ganancias esperadas del vendedor son:

$$\mathbb{E}(u_v) = p\mathbb{P}(v_i > p) = p(1 - F(p))$$

La condición de primer orden es que:

$$1 - F(p) - pf(p) = 0 \quad \iff \quad p = \frac{1 - F(p)}{f(p)}$$

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.
  Si vende a precio p, las ganancias esperadas del vendedor son:

  $$\mathbb{E}(u_v) = p\mathbb{P}(v_i > p) = p(1 - F(p))$$

  La condición de primer orden es que:

  $$1 - F(p) - pf(p) = 0 \quad \iff \quad p = \frac{1 - F(p)}{f(p)}$$

  Luego, lo mejor que puede hacer el vendedor es fijar p^* tal que $MR(p^*) = 0$.

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.
  Si vende a precio p, las ganancias esperadas del vendedor son:

  $$\mathbb{E}(u_v) = p\mathbb{P}(v_i > p) = p(1 - F(p))$$

  La condición de primer orden es que:

  $$1 - F(p) - pf(p) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1 - F(p)}{f(p)}$$

  Luego, lo mejor que puede hacer el vendedor es fijar p^* tal que $MR(p^*) = 0$.
  Notar que $MR(\cdot)$ es continua y tal que $MR(0) < 0$, $MR(1) > 0$, luego por TVI p^* existe.

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.
  Si vende a precio p, las ganancias esperadas del vendedor son:

$$\mathbb{E}(u_v) = p\mathbb{P}(v_i > p) = p(1 - F(p))$$

La condición de primer orden es que:

$$1 - F(p) - pf(p) = 0 \quad \iff \quad p = \frac{1 - F(p)}{f(p)}$$

Luego, lo mejor que puede hacer el vendedor es fijar p^* tal que $MR(p^*) = 0$.
Notar que $MR(\cdot)$ es continua y tal que $MR(0) < 0$, $MR(1) > 0$, luego por TVI p^* existe.
Como $MR(\cdot)$ además es estrictamente creciente, p^* es único.

P1 (a)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Un solo comprador con valoración desconocida $v_i \sim F[0,1]$. Sabemos que $F' = f > 0$ y que $MR(t) = t - \frac{1-F(t)}{f(t)}$ es estrictamente creciente. Buscamos mecanismo que maximiza ganancias.

- Una opción, razonar como en cátedra...
- Equivalentemente:
  Sabemos que el comprador adquiere el producto si y solo si $v_i > p$.
  Si vende a precio p, las ganancias esperadas del vendedor son:

$$\mathbb{E}(u_v) = p\mathbb{P}(v_i > p) = p(1 - F(p))$$

La condición de primer orden es que:

$$1 - F(p) - pf(p) = 0 \quad \iff \quad p = \frac{1 - F(p)}{f(p)}$$

Luego, lo mejor que puede hacer el vendedor es fijar p^* tal que $MR(p^*) = 0$.
Notar que $MR(\cdot)$ es continua y tal que $MR(0) < 0$, $MR(1) > 0$, luego por TVI p^* existe.
Como $MR(\cdot)$ además es estrictamente creciente, p^* es único.

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

- Por un lado, la utilidad del vendedor aumenta si puede elegir el mecanismo. La capacidad de elegir un mecanismo le entrega poder de mercado al vendedor.

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

- Por un lado, la utilidad del vendedor aumenta si puede elegir el mecanismo. La capacidad de elegir un mecanismo le entrega poder de mercado al vendedor.
  En ese sentido, es mejor poder elegir el mecanismo que estar sujeto a la licitación todos pagan.

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

- Por un lado, la utilidad del vendedor aumenta si puede elegir el mecanismo. La capacidad de elegir un mecanismo le entrega poder de mercado al vendedor.
  En ese sentido, es mejor poder elegir el mecanismo que estar sujeto a la licitación todos pagan.
- Sin embargo, en el segundo caso el mecanismo es fijo, pero hay más compradores. Como hay más compradores, la valoración esperada por el bien es más alta, lo que debería llevar a mayores ingresos.

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

- Por un lado, la utilidad del vendedor aumenta si puede elegir el mecanismo. La capacidad de elegir un mecanismo le entrega poder de mercado al vendedor.
  En ese sentido, es mejor poder elegir el mecanismo que estar sujeto a la licitación todos pagan.
- Sin embargo, en el segundo caso el mecanismo es fijo, pero hay más compradores. Como hay más compradores, la valoración esperada por el bien es más alta, lo que debería llevar a mayores ingresos.
  En este sentido, es mejor tener más compradores en la licitación todos pagan que menos compradores en el mecanismo óptimo.

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

- Por un lado, la utilidad del vendedor aumenta si puede elegir el mecanismo. La capacidad de elegir un mecanismo le entrega poder de mercado al vendedor.
  En ese sentido, es mejor poder elegir el mecanismo que estar sujeto a la licitación todos pagan.
- Sin embargo, en el segundo caso el mecanismo es fijo, pero hay más compradores. Como hay más compradores, la valoración esperada por el bien es más alta, lo que debería llevar a mayores ingresos.
  En este sentido, es mejor tener más compradores en la licitación todos pagan que menos compradores en el mecanismo óptimo.

¿Qué mecanismo recomendamos?

P1 (b)

Un vendedor posee un único bien (a costo 0). Dos alternativas:

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

Valoraciones distribuyen de acuerdo a F y son información privada. ¿Cuál es el tradeoff que enfrenta el comprado?

El tradeoff viene de:

- Por un lado, la utilidad del vendedor aumenta si puede elegir el mecanismo. La capacidad de elegir un mecanismo le entrega poder de mercado al vendedor.
  En ese sentido, es mejor poder elegir el mecanismo que estar sujeto a la licitación todos pagan.
- Sin embargo, en el segundo caso el mecanismo es fijo, pero hay más compradores. Como hay más compradores, la valoración esperada por el bien es más alta, lo que debería llevar a mayores ingresos.
  En este sentido, es mejor tener más compradores en la licitación todos pagan que menos compradores en el mecanismo óptimo.

¿Qué mecanismo recomendamos?

P1 (c)

Suponemos F uniforme sobre $[0, 1]$. Queremos calcular recaudaciones esperadas.

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

P1 (c)

Suponemos F uniforme sobre $[0, 1]$. Queremos calcular recaudaciones esperadas.

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

- Cuando F es uniforme, la expresión de la parte (a) se reescribe como:

$$p = 1 - p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

(Notar que este es el resultado de la cátedra!)

P1 (c)

Suponemos F uniforme sobre $[0, 1]$. Queremos calcular recaudaciones esperadas.

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

- Cuando F es uniforme, la expresión de la parte (a) se reescribe como:

$$p = 1 - p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

(Notar que este es el resultado de la cátedra!)
Luego, la recaudación esperada del vendedor es:

$$\mathbb{E}(u_v) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(v_i > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

P1 (c)

Suponemos F uniforme sobre $[0,1]$. Queremos calcular recaudaciones esperadas.

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

- Cuando F es uniforme, la expresión de la parte (a) se reescribe como:

$$p = 1 - p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

(Notar que este es el resultado de la cátedra!)
Luego, la recaudación esperada del vendedor es:

$$\mathbb{E}(u_v) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(v_i > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- Del problema 4 de la tarea 5 sabemos que la apuesta de equilibrio en la licitación todos pagan es:

$$b_i = \frac{v_i^2}{2}$$

P1 (c)

Suponemos F uniforme sobre $[0, 1]$. Queremos calcular recaudaciones esperadas.

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

- Cuando F es uniforme, la expresión de la parte (a) se reescribe como:

$$p = 1 - p \quad \iff \quad p = \frac{1}{2}$$

(Notar que este es el resultado de la cátedra!)
Luego, la recaudación esperada del vendedor es:

$$\mathbb{E}(u_v) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(v_i > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- Del problema 4 de la tarea 5 sabemos que la apuesta de equilibrio en la licitación todos pagan es:

$$b_i = \frac{v_i^2}{2}$$

Y la recaudación esperada es:

$$\mathbb{E}(u_v') = \mathbb{E}(2b_i) = \frac{1}{3}$$

P1 (c)

Suponemos F uniforme sobre $[0, 1]$. Queremos calcular recaudaciones esperadas.

1. Mecanismo óptimo con un solo comprador.
2. Licitación todos pagan con dos compradores.

- Cuando F es uniforme, la expresión de la parte (a) se reescribe como:

$$p = 1 - p \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1}{2}$$

(Notar que este es el resultado de la cátedra!)
Luego, la recaudación esperada del vendedor es:

$$\mathbb{E}(u_v) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(v_i > \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- Del problema 4 de la tarea 5 sabemos que la apuesta de equilibrio en la licitación todos pagan es:

$$b_i = \frac{v_i^2}{2}$$

Y la recaudación esperada es:

$$\mathbb{E}(u_v') = \mathbb{E}(2b_i) = \frac{1}{3}$$

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

- Después, recordábamos que un EB corresponde a una función que va desde el conjunto de estrategias en el espacio de acciones. En este caso $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

- Después, recordábamos que un EB corresponde a una función que va desde el conjunto de estrategias en el espacio de acciones. En este caso $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.
- En equilibrio, cada jugador maximiza su utilidad esperada dado su tipo y las acciones del resto:

$$\sigma(v_i) \in \arg\max_{b_i \geq 0} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i)]$$

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

- Después, recordábamos que un EB corresponde a una función que va desde el conjunto de estrategias en el espacio de acciones. En este caso $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.
- En equilibrio, cada jugador maximiza su utilidad esperada dado su tipo y las acciones del resto:

$$\sigma(v_i) \in \arg\max_{b_i \geq 0} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i)]$$

- En este caso, imponiendo condición de primer orden obteníamos que:

$$\sigma(v_i) = k + \frac{v_i^2}{2}$$

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

- Después, recordábamos que un EB corresponde a una función que va desde el conjunto de estrategias en el espacio de acciones. En este caso $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.
- En equilibrio, cada jugador maximiza su utilidad esperada dado su tipo y las acciones del resto:

$$\sigma(v_i) \in \arg\max_{b_i \geq 0} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i)]$$

- En este caso, imponiendo condición de primer orden obteníamos que:

$$\sigma(v_i) = k + \frac{v_i^2}{2}$$

- Imponiendo que $\sigma(0) = 0$ llegamos a que:

$$\sigma(v_i) = \frac{v_i^2}{2}$$

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

- Después, recordábamos que un EB corresponde a una función que va desde el conjunto de estrategias en el espacio de acciones. En este caso $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$.
- En equilibrio, cada jugador maximiza su utilidad esperada dado su tipo y las acciones del resto:

$$\sigma(v_i) \in \arg \max_{b_i \geq 0} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i)]$$

- En este caso, imponiendo condición de primer orden obteníamos que:

$$\sigma(v_i) = k + \frac{v_i^2}{2}$$

- Imponiendo que $\sigma(0) = 0$ llegamos a que:

$$\sigma(v_i) = \frac{v_i^2}{2}$$

- Y la recaudación esperada era:

$$\mathbb{E}(2\frac{v_i^2}{2}) = \mathbb{E}(v_i^2) = \int_0^1 v_i^2 dv_i = \frac{v_i^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

P1 (bonus) ¿Cómo se calculaba el equilibrio en la licitación todos pagan?

- Primero escribíamos utilidades dadas las apuestas y las valoraciones:

$$u_i(b, v_i) = \begin{cases} v_i - b_i & bi > b_j \\ \frac{1}{2}(v_i - b_i) & b_i = b_j \\ -b_i & b_i < b_j \end{cases}$$

- Después, recordábamos que un EB corresponde a una función que va desde el conjunto de estrategias en el espacio de acciones. En este caso $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- En equilibrio, cada jugador maximiza su utilidad esperada dado su tipo y las acciones del resto:

$$\sigma(v_i) \in \arg\max_{b_i \geq 0} \mathbb{E}[u_i(b_i, \sigma(v_j), v_i)]$$

- En este caso, imponiendo condición de primer orden obteníamos que:

$$\sigma(v_i) = k + \frac{v_i^2}{2}$$

- Imponiendo que $\sigma(0) = 0$ llegamos a que:

$$\sigma(v_i) = \frac{v_i^2}{2}$$

- Y la recaudación esperada era:

$$\mathbb{E}(2\frac{v_i^2}{2}) = \mathbb{E}(v_i^2) = \int_0^1 v_i^2 dv_i = \frac{v_i^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$.
Consumidor con utilidad: $u(q, t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$.
Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t - kq^2 \\ \text{s.a.} \quad & \theta q - t \geq 0 \\ & t, q \geq 0 \end{aligned}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t - kq^2 \\ \text{s.a.} \quad & \theta q - t \geq 0 \\ & t, q \geq 0 \end{aligned}$$

En el óptimo se cumple que:

$$t = \theta q$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t - kq^2 \\ \text{s.a.} \quad & \theta q - t \geq 0 \\ & t, q \geq 0 \end{aligned}$$

En el óptimo se cumple que:

$$t = \theta q$$

Luego, el problema es equivalente a:

$$max_{q \geq 0} \quad \theta q - kq^2$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t - kq^2 \\ \text{s.a.} \quad & \theta q - t \geq 0 \\ & t, q \geq 0 \end{aligned}$$

En el óptimo se cumple que:

$$t = \theta q$$

Luego, el problema es equivalente a:

$$max_{q \geq 0} \quad \theta q - kq^2$$

La condición de primer orden arroja que:

$$\theta - 2kq = 0 \quad \iff \quad q = \frac{\theta}{2k}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t - kq^2 \\ \text{s.a.} \quad & \theta q - t \geq 0 \\ & t, q \geq 0 \end{aligned}$$

En el óptimo se cumple que:

$$t = \theta q$$

Luego, el problema es equivalente a:

$$max_{q \geq 0} \quad \theta q - kq^2$$

La condición de primer orden arroja que:

$$\theta - 2kq = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q = \frac{\theta}{2k}$$

Y entonces:

$$q\hat{(\theta)} = \frac{\theta}{2k}, \quad \hat{t}(\theta) = \frac{\theta^2}{2k}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(a) Suponemos θ conocido. Buscamos $(\hat{q}(\theta), \hat{t}(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t - kq^2 \\ \text{s.a.} \quad & \theta q - t \geq 0 \\ & t, q \geq 0 \end{aligned}$$

En el óptimo se cumple que:

$$t = \theta q$$

Luego, el problema es equivalente a:

$$max_{q\geq 0} \quad \theta q - kq^2$$

La condición de primer orden arroja que:

$$\theta - 2kq = 0 \quad \iff \quad q = \frac{\theta}{2k}$$

Y entonces:

$$q(\hat{\theta}) = \frac{\theta}{2k}, \quad \hat{t}(\theta) = \frac{\theta^2}{2k}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$.
Consumidor con utilidad: $u(q, t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(b) Ahora $\theta \sim U[0, 1]$ es desconocido. Buscamos menú $\theta \to (q^*(\theta), t^*(\theta))$ óptimo.

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(b) Ahora $\theta \sim U[0,1]$ es desconocido. Buscamos menú $\theta \to (q^*(\theta), t^*(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{array}{lcr}
\text{máx} & \int_0^1 t(\theta) - c(q(\theta))d\theta & \\
\text{s.a.} & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \forall \theta, \theta' & (RI) \\
 & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq 0, \forall \theta & (RP) \\
 & t, q : [0,1] \to \mathbb{R}+ &
\end{array}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(b) Ahora $\theta \sim U[0,1]$ es desconocido. Buscamos menú $\theta \to (q^*(\theta), t^*(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & \int_0^1 t(\theta) - c(q(\theta))d\theta & \\ \text{s.a.} & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \forall \theta, \theta' & (RI) \\ & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq 0, \forall \theta & (RP) \\ & t, q : [0,1] \to \mathbb{R}+ & \end{array}$$

Del lema de Myerson sabemos que en realidad podemos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(b) Ahora $\theta \sim U[0,1]$ es desconocido. Buscamos menú $\theta \to (q^*(\theta), t^*(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{array}{lcr}
\text{máx} & \int_0^1 t(\theta) - c(q(\theta)) d\theta & \\
\text{s.a.} & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \forall \theta, \theta' & (RI) \\
& \theta q(\theta) - t(\theta) \geq 0, \forall \theta & (RP) \\
& t, q : [0,1] \to \mathbb{R}+ &
\end{array}$$

Del lema de Myerson sabemos que en realidad podemos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta) q - c(q)$$

Con $\psi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$.

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(b) Ahora $\theta \sim U[0,1]$ es desconocido. Buscamos menú $\theta \to (q^*(\theta), t^*(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$\begin{array}{lcr} \text{máx} & \int_0^1 t(\theta) - c(q(\theta))d\theta & \\ \text{s.a.} & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \forall \theta, \theta' & (RI) \\ & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq 0, \forall \theta & (RP) \\ & t, q : [0,1] \to \mathbb{R}+ & \end{array}$$

Del lema de Myerson sabemos que en realidad podemos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta) q - c(q)$$

Con $\psi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$.
Y que el óptimo del problema viene dado por $q^*(\theta)$ que resuelve el problema anterior y:

$$t^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_0^\theta q^*(s)ds$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(b) Ahora $\theta \sim U[0,1]$ es desconocido. Buscamos menú $\theta \to (q^*(\theta), t^*(\theta))$ óptimo.

El monopolio resuelve:

$$
\begin{array}{lll}
\text{máx} & \int_0^1 t(\theta) - c(q(\theta))d\theta & \\
\text{s.a.} & \theta q(\theta) - t(\theta) \geq \theta q(\theta') - t(\theta'), \forall \theta, \theta' & (RI) \\
& \theta q(\theta) - t(\theta) \geq 0, \forall \theta & (RP) \\
& t, q : [0,1] \to \mathbb{R}+ &
\end{array}
$$

Del lema de Myerson sabemos que en realidad podemos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta) q - c(q)$$

Con $\psi(\theta) = \theta - \frac{1-F(\theta)}{f(\theta)}$.
Y que el óptimo del problema viene dado por $q^*(\theta)$ que resuelve el problema anterior y:

$$t^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_0^\theta q^*(s)ds$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta) q - c(q)$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

En este caso:

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - (1 - \theta) = 2\theta - 1$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

En este caso:

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - (1 - \theta) = 2\theta - 1$$

Así que en realidad queremos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad (2\theta - 1)q - kq^2$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

En este caso:

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - (1-\theta) = 2\theta - 1$$

Así que en realidad queremos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad (2\theta - 1)q - kq^2$$

La condición de primer orden es que:

$$2\theta - 1 - 2kq = 0 \quad \iff \quad q = \frac{2\theta - 1}{2k}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

En este caso:

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - (1-\theta) = 2\theta - 1$$

Así que en realidad queremos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad (2\theta - 1)q - kq^2$$

La condición de primer orden es que:

$$2\theta - 1 - 2kq = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q = \frac{2\theta - 1}{2k}$$

De donde se deduce que la cantidad óptima es:

$$q(\theta^*) = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{1}{2} \\ \frac{2\theta-1}{2k} & \theta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

En este caso:

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - (1 - \theta) = 2\theta - 1$$

Así que en realidad queremos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad (2\theta - 1)q - kq^2$$

La condición de primer orden es que:

$$2\theta - 1 - 2kq = 0 \quad \iff \quad q = \frac{2\theta - 1}{2k}$$

De donde se deduce que la cantidad óptima es:

$$q(\theta^*) = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{1}{2} \\ \frac{2\theta - 1}{2k} & \theta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y la transferencia óptima:

$$t^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_0^\theta q^*(s)ds = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{1}{2} \\ \frac{2\theta^2 + 1}{4k} & \theta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

Resolvamos entonces:

$$\max_{q \geq 0} \quad \psi(\theta)q - c(q)$$

En este caso:

$$\psi(\theta) = \theta - \frac{1 - F(\theta)}{f(\theta)} = \theta - (1 - \theta) = 2\theta - 1$$

Así que en realidad queremos resolver:

$$\max_{q \geq 0} \quad (2\theta - 1)q - kq^2$$

La condición de primer orden es que:

$$2\theta - 1 - 2kq = 0 \quad \iff \quad q = \frac{2\theta - 1}{2k}$$

De donde se deduce que la cantidad óptima es:

$$q(\theta^*) = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{1}{2} \\ \frac{2\theta - 1}{2k} & \theta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Y la transferencia óptima:

$$t^*(\theta) = \theta q^*(\theta) - \int_0^\theta q^*(s)ds = \begin{cases} 0 & \theta < \frac{1}{2} \\ \frac{2\theta^2 + 1}{4k} & \theta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$.
Consumidor con utilidad: $u(q, t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(c) Supongamos $k = 1$ y comparemos $\hat{q}(\theta)$ con $q^*(\theta)$.

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q,t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(c) Supongamos $k = 1$ y comparemos $\hat{q}(\theta)$ con $q^*(\theta)$.

De la parte (a):

$$\hat{q}(\theta) = \frac{\theta}{2k} = \frac{\theta}{2}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q, t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(c) Supongamos $k = 1$ y comparemos $\hat{q}(\theta)$ con $q^*(\theta)$.

De la parte (a):

$$\hat{q}(\theta) = \frac{\theta}{2k} = \frac{\theta}{2}$$

De la parte (b), para $\theta < \frac{1}{2}, q(\theta) = 0$ y para $\theta \geq \frac{1}{2}$:

$$q^*(\theta) = \frac{2\theta - 1}{2k} = \frac{2\theta - 1}{2}$$

P2. Monopolio con costos $c(q) = kq^2$. Consumidor con utilidad: $u(q, t) = \theta q - t$ y utilidad de reserva 0.

(c) Supongamos $k = 1$ y comparemos $\hat{q}(\theta)$ con $q^*(\theta)$.

De la parte (a):

$$\hat{q}(\theta) = \frac{\theta}{2k} = \frac{\theta}{2}$$

De la parte (b), para $\theta < \frac{1}{2}, q(\theta) = 0$ y para $\theta \geq \frac{1}{2}$:

$$q^*(\theta) = \frac{2\theta - 1}{2k} = \frac{2\theta - 1}{2}$$

Gráficamente: