Pauta Auxiliar 6

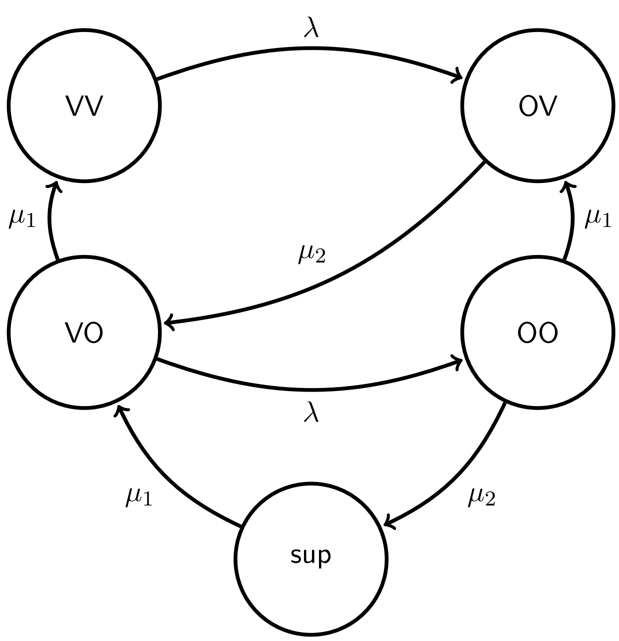
Cadenas de Markov en tiempo continuo

Problema 1

Walter y Jesse han comenzado un nuevo negocio de producción de novedosos cristales de color azul. Para esto cuentan con una casa rodante en donde fabrican estos novedosos cristales, para después venderlos en Albuquerque, lugar donde la gente es sorprendentemente adicta a ellos. Las órdenes de producción llegan vía Whatsapp al teléfono de Walter de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [órdenes/hora]. Una vez recibida una orden, Walter y Jesse comienzan a trabajar en ella de forma inmediata. El proceso productivo consta de 2 pasos. (a) Se produce, refina, colora y procesa el líquido de cristal en un matraz suficientemente grande y completo para realizar estas tareas. (b) Se vierte el líquido en una bandeja rectangular, para después secarla en un refrigerador esperando a que se cristalice. Finalmente se forma una lámina de cristal con la forma de la bandeja, en donde se procede a fracturar esta "lámina" para obtener los cristales azules.

Walter se hace cargo del paso (a), mientras que Jesse se ocupa del paso (b). Jesse y Walter demoran en sus labores tiempos exponenciales de media $1/\mu_1$ [horas] y $1/\mu_2$ [horas], respectivamente. Si están trabajando ambos y Walter termina primero, supervisa que su trabajo no se dañe. Para mantener la concentración, Walter apaga su teléfono mientras trabaja o supervisa su trabajo terminado, y lo vuelve a encender cuando termina alguna de estas labores del proceso. Suponga que las órdenes que llegan mientras el teléfono de Walter está apagado se pierden, y que las órdenes son recibidas cuando Walter está desocupado.

1. La Cadena de Markov asociada al problema es la siguiente:



Dado que la cadena es finita y consiste en una única clase recurrente, la existencia de probabilidades estacionarias es directa. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\lambda\pi_{vv} = \mu_1\pi_{vo}$$
$$\mu_2\pi_{ov} = \lambda\pi_{vv} + \mu_1\pi_{oo}$$
$$(\lambda+\mu_1)\pi_{vo} = \mu_2\pi_{ov} + \mu_1\pi_{sup}$$
$$(\mu_1+\mu_2+)\pi_{oo} = \lambda\pi_{vo}$$
$$\mu_1\pi_{sup} = \mu_2\pi_{oo}$$
$$\sum_0^k \pi_i = 1$$

2. La proporción de tiempo que pasa Jesse desocupado es:

$$\pi_{vv} + \pi_{ov}$$

3. La fracción de ordenes que se pierde, son aquellas que llegan cuando Walter está ocupado, es decir:

$$\pi_{ov} + \pi_{oo} + \pi_{sup}$$

4. La cantidad ordenes que piden calcular son las ordenes que están dentro del sistema, es decir:

$$E(\text{ordenes incompletas}) = 1\cdot(\pi_{ov}+\pi_{vo}) + 2\cdot(\pi_{oo}+\pi_{sup})$$

Problema 2

Pasajeros llegan a un paradero de buses de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ, mientras que los buses llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa μ. Cada bus tiene capacidad para llevar C personas, y partirá inmediatamente una vez que esté lleno. La subida de pasajeros a los buses es instantánea y tanto los buses como los pasajeros forman una fila para subir al bus/tomar pasajeros.

a) Suponga que el paradero se encuentra completamente vacío: no hay pasajeros ni buses. ¿Cuál es la probabilidad de que no queden más de n pasajeros en el paradero tras la salida del siguiente vehículo?

Solución: Podemos interpretar la cantidad de pasajeros que llegan antes que el siguiente bus como una variable aleatoria geométrica de parámetro $p = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$. De esta manera, la probabilidad de que queden más de n pasajeros cuando salga el siguiente bus es $(1-p)^{C+n+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+n+1}$, ya que los primeros C se subirán. Finalmente, la probabilidad buscada es

$$1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+n+1}$$

Obs: Alternativamente, podemos definir P_j como la probabilidad de que queden j personas en el paradero tras la salida del siguiente bus. Si $j \geq 1$, P_j es igual a la probabilidad de que lleguen exactamente $C+j$ pasajeros antes de la llegada del siguiente bus, es decir

$$P_j = \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+j} \frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad \forall j \geq 1$$

Por otro lado, P_0 corresponde a la probabilidad de que a lo más lleguen C pasajeros antes que el siguiente bus:

$$P_0 = \sum_{i=0}^{C} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^i \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

Finalmente, la probabilidad pedida viene dada por

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} P_j &= \sum_{i=0}^{C} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^i \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+j} \frac{\mu}{\mu+\lambda} \\
&= \frac{\mu}{\mu+\lambda} \sum_{j=0}^{C+n} \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^j \\
&= 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{C+n+1}
\end{aligned}$$

b) Si en el paradero hay $C-1$ pasajeros esperando partir, pero no ha llegado ningún bus, ¿cuánto es el tiempo esperado hasta que salga el siguiente bus?

Solución: En cualquier caso, primero se debe considerar el tiempo que demora en llegar el siguiente bus, cuya esperanza es $\frac{1}{\mu}$. Una vez que llega el bus, se debe considerar dos escenarios posibles: si ya había llegado al menos un pasajero, el bus sale inmediatamente. De lo contrario, se debe esperar un tiempo adicional de media $\frac{1}{\lambda}$. Por lo tanto, el tiempo esperado hasta que salga el siguiente bus es

$$\frac{1}{\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot 0 + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}$$

c) Suponga que en $t=0$ había $C-1$ pasajeros esperando partir, pero no había llegado ningún bus. Posteriormente, llegaron exactamente un pasajero y un bus antes del instante T. En esperanza, ¿en qué momento el bus abandonó la parada?

Solución: Sean $t_p \sim U[0,T]$ y $t_b \sim U[0,T]$ los instantes de llegada del pasajero y el bus, respectivamente. El bus salió en el momento en que ambos se encontraban en el paradero, es decir $\max\{t_p, t_b\}$. Por lo tanto, el valor buscado es

$$\mathbb{E}(\max\{t_p, t_b\}) = \frac{2T}{3}$$

d) Considere ahora que la tasa de llegada de pasajeros no es conocida, pero que a priori se estima que $\lambda \sim exp(\alpha)$. Si hay $C-1$ pasajeros y un bus en la parada, ¿cuál es la probabilidad que, a partir de este momento, el bus demore menos de t en salir?

Solución: Sea T el tiempo hasta la llegada del siguiente pasajero, que es cuando saldrá el bus.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T<t) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T<t|\lambda=x) f_\lambda(x)dx \\
&= \int_0^\infty (1-e^{-xt})\alpha e^{-\alpha x} dx \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx - \int_0^\infty \alpha e^{-x(t+\alpha)}dx \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x}dx - \frac{\alpha}{t+\alpha}\int_0^\infty (t+\alpha)e^{-x(t+\alpha)}dx \\
&= 1 - \frac{\alpha}{t+\alpha} \\
&= \frac{t}{t+\alpha}
\end{aligned}$$