IN3702 - Investigación de Operaciones

Auxiliar Nº EXTRA - Probabilidades y otros

Profesor: Dennis Saure
Auxiliares: Simón Grass, Matías Muñoz, Natalia Trigo

1 Resumen Probabilidades

1.1 probabilidades condicionales

Sean 2 eventos A,B, con $\mathbb{P}(B) \geq 0$, se define la probabilidad condicional de A respecto a B (probabilidad de "A dado B") como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Interpretación Tomando los casos en los que B se cumple, $\mathbb{P}(A|B)$ se puede interpretar como la parte en que también se cumple A. Por ejemplo, si el evento B es tener la gripe, y el evento A es tener dolor de cabeza, entonces $\mathbb{P}(A|B)$ sería la probabilidad de tener dolor de cabeza cuando se esta enfermo de gripe.

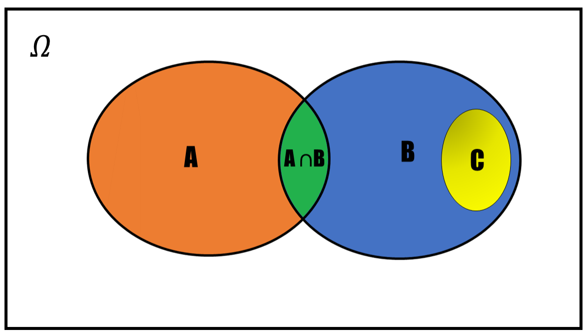

Fig. 1: Tenemos el conjunto universo, y 3 eventos (o conjuntos): A, B y C. Este es el espacio de probabilidades normal que usamos y Se debe notar que las probabilidades son casos favorables dividido casos totales, por lo tanto te pregunto, ¿Que tan grande es la probabilidad que pase C? ¿pequeña no?

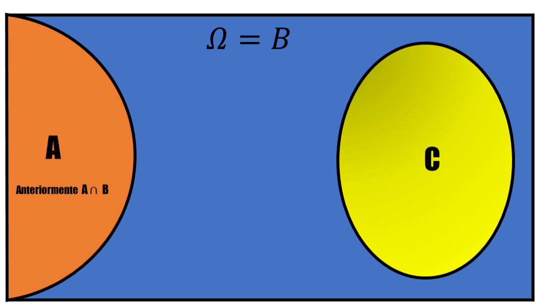

Fig. 2: Se puede observar gráficamente el | B, ahora nuetro "universo" es solo el conjunto B. Pregunta ¿ que pasó con el resto del conjunto A? ¿ que tan grande es la probabilidad de que pase C ahora? ¿bastante más grande no?

Ejemplo: Imagina que estamos entrevistando gente de Beaucheff, entonces, viendo como conjunto universo "los beaucheffian@s", **¿cual es la probabilidad que alguien haya dado taller 1?**. Ahora ponte en este caso, de que decidimos ir a industrias y preguntarle a la gente de ahí, entonces, **¿que pasa con esa probabilidad?**. El decidir entrevistar solo industriales es equivalente a pasar del conjunto beaucheff, al conjunto de industrias como espacio muestral. Literalmente **condicionamos esa probabilidad**

1.1.1 Propiedades

1. $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A^c|B) = 1$
2. $B \subseteq A \ \rightarrow \mathbb{P}(A|B) = 1$ Es decir, si todos los industriales dieron taller 1 (taller 1 $\subset$ industrial) entonces la probabilidad de ser indstrial dado que di taller 1 es 1.
3. Si son independientes los eventos A y B, entonces $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ y $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$. Esto surge de la definición matemática, ignora este caso para la intuición, pues, si sabes que 2 eventos son independientes, te hace sentido condicionarlos en primer lugar,cambia algo si los condiciono?. **mucho cuidado, a la mente le gusta pensar que todo es independiente**.

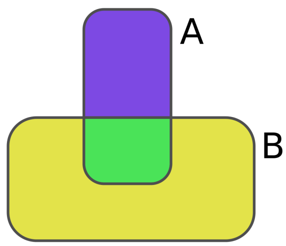

Fig. 3: No se les puede olvidar, $\mathbb{P}(A|B)$ En el mundo donde B ya pasó, es la fracción de que pase A

1.2 Teorema de Bayes

Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes (no pueden suceder simultaneamente) y exhautivos (uno de ellos debe ocurrir), y tal que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $\mathbb{P}(B|A_i)$ y $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Entonces, la probabilidad $\mathbb{P}(A_i|B)$ es:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}$$

Literalmente es notar que $A \cap B = B \cap A$, por lo tanto $\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$ y despejar.

1.3 Ley de Probabilidades Total

Dada una partición disjunta ($A_i \cup A_j = \varnothing$ si $i \neq j$) $\{A_i\}_{i \in I}$ de un espacio muestral S tal que $\mathbb{P}(A_i) > 0 \ \forall i$, se tiene que para cualquier evento A

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

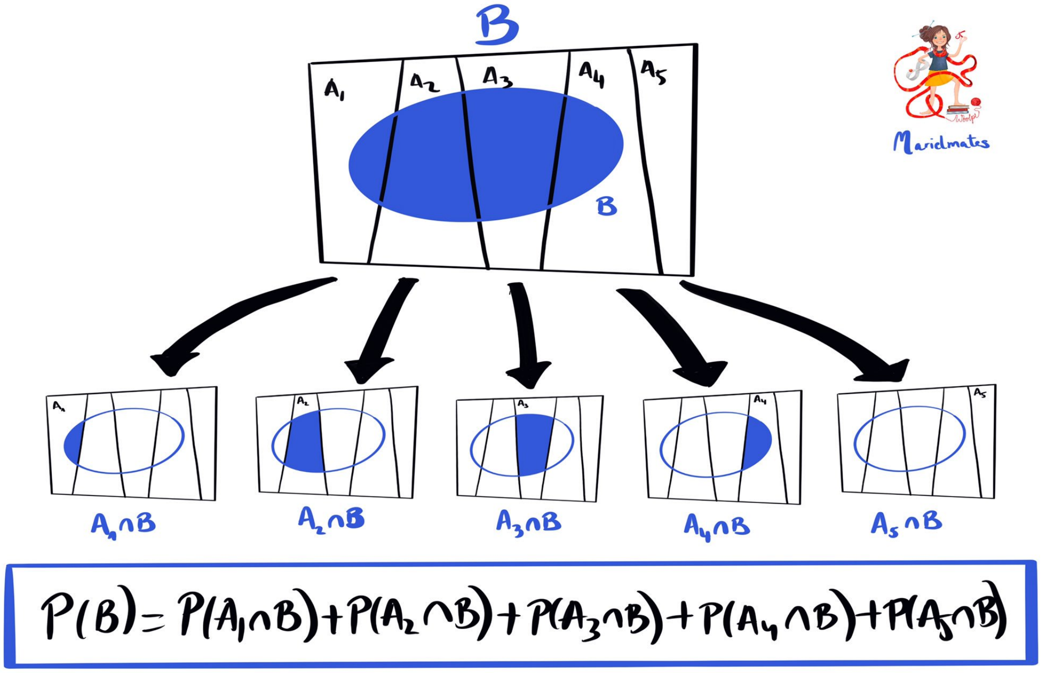

Fig. 4: Probabilidades totales, mejor conocido como "armar el rompecabezas una pieza a la vez"

2 Distribuciones varias

Comentarios antes de empezar: Algunas cosas que deben recordar usando estas distribuciones, es la noción de que hay veces que es más facil calcular la probabilidad del complemento, y luego definir la probabilidad buscada como 1- probabilidad del complemento.

2.1 Distribución Binomial:

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1..., n \tag{1}$$

Donde n corresponde al número de veces que se realiza el experimento, p a la probabilidad de éxito y X la v.a que representa el número de éxitos obtenidos en las n realizaciones.
Nota: Esta distribución se denota como $B(n, p)$ recordar el binomio de newton:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} \tag{2}$$

Comentarios y caso donde se usa el complemento

Esta distribución surge de la distribución **bernoulli** que se define:

- evento A con probabilidad p
- evento A^c con probabilidad 1-p.

Pero por ejemplo, si lanzas 3 monedas cargadas, con probabilidad p de sacar cara, y quieres 2 caras. ¿cual es su probabilidad?

Esto no es una bernoulli para cada moneda y luego multiplicarlas por ser independientes pues tus casos favorables son aún más. Por esto surge la Binomial pues los casos favorables son moneda 1 y 2 cara, moneda 1 y 3 cara, y moneda 2 y 3 cara(Notar que sacar 1 y 2 es lo mismo que 2 y 1, por eso no se cuenta 2 veces) entonces es 2C3 $= \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$ y finalmente tendríamos 3 veces la probabilidad de multiplicar las bernoullis $3p^2(1-p)$ lo que es equivalente a $\binom{3}{2}p^2(1-p)^{3-2}$.

Un ultimo truco Siempre recuerda que si te piden la probabilidad de sacar 2 o más caras en N lanzamientos, es equivalente a 1- la probabilidad de sacar un solo sello. En esta distribución se usa demasiado el concepto de $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$

2.2 Distribución Poisson:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

Suele representar sucesos independientes que ocurren en un intervalo de tiempo, donde X representa el número de ocurrencias por unidad de tiempo.

2.3 Distribución Geométrica:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p \qquad k = 0, 1, 2, 3, ... \tag{4}$$

Modela el número de fracasos hasta el primer éxito, con p la probabilidad de éxito y k el número de fallos.

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p \qquad k = 1, 2, 3... \tag{5}$$

Representa la probabilidad de que el intento k sea el primer éxito.

3 Preguntas

3.1 P1

Seas tu, un paco, que sabe que si eligieras aleatoriamente cualquier persona en la calle, esta no tendrá un permiso para salir obtenido en la maravillosa página de comisaría virtual con probabilidad p, y si lo tendría con probabilidad 1-p.

Tu día estuvo muy fome, así que hiciste parar un colectivo, el cual tiene capacidad para 5 personas, pues lo viste lleno y tu sentido arácnido te dice con completa exactitud que alguien ahí no tiene permiso para salir. Lo que no debería pasar ya que estamos en cuarentena.

Haces bajar a la gente del colectivo, y tu detienes a la primera persona para fiscalizarlo. ¿cuanto es la probabilidad de que no tenga permiso, si no tuvieses sentido arácnido?¿ y si este fuera tan perfecto como le aseguras a la gente que es?.

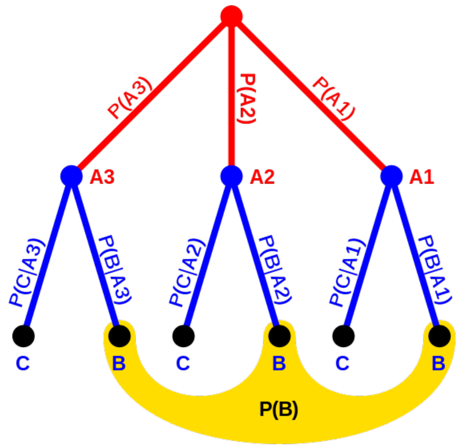

Fig. 5: imagen