IN3701 - Modelamiento y Optimización

Tarea teórica 3

Profesores: Fernando Ordóñez, Andreas Wiese
Auxiliares: Cristián Lira, David Palacios, Diego Reyes, Jose Gonzalez, Macarena Osorio, Matias Muñoz, Pablo Pavez, Vicente Plaza
Ayudantes: Canela Meffert, Carolina Salgado, Daniel Monsalve, Daniela Fernández, Daniela Valdovinos, Mariana Quiroga, Maximiliano Martínez, Nicolás Acevedo

1. Direcciones factibles

Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ un poliedro en forma estándar y $x^* \in P$. Recuerde que un vector $d \neq 0$ es una dirección factible en x^* si existe $\theta > 0$ tal que $x^* + \theta d \in P$. Consideremos el PL dado por $\min\{c^T x : x \in P\}$.

1. Pruebe que el vector $d \in \mathbb{R}^n$ es una dirección factible en x^* si y solo si $Ad = 0$ y $d_i \geq 0$ para todo i tal que $x_i^* = 0$.

2. Sea $Z = \{i | x_i^* = 0\}$. Prueba que x^* es una solucion óptima del PL si y solo si el problema

$$\begin{array}{lrcll} \text{mín} & c^T d & & & \\ \text{s.a.} & Ad & = & 0 & \\ & d_i & \geq & 0 & \forall i \in Z \end{array}$$

tiene valor óptimo igual a 0.

Pauta Pregunta 1:

1. PDQ: Dado $x^* \in P$, $d \in \mathbb{R}^n$ es dirección factible $\iff$ $Ad = 0$ y $d_i \geq 0$ $\forall i$ tal que $x_i^* = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x^* \in P$ y d dirección factible con respecto a dicho punto. Luego, $\exists \theta > 0$ tal que $x^* + \theta d \in P$, es decir, cumple las restricciones:

$A(x^* + \theta d) = b$	$x^* + \theta d \geq 0$
$Ax^* + \theta Ad = b$	$x_i^* + \theta d_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
$b + \theta Ad = b$ pues $x^* \in P \Rightarrow Ax^* = b$	$x_i^* + \theta d_i \geq 0 \quad \forall i$ tal que $x_i^* = 0$
$\theta Ad = 0$	$\theta d_i \geq 0 \quad \forall i$ tal que $x_i^* = 0$
$Ad = 0$	$d_i \geq 0 \quad \forall i$ tal que $x_i^* = 0$

Luego, se probó que d es tal que $Ad = 0$ y $d_i \geq 0$ $\forall i$ tal que $x_i^* = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $x^* \in P$ y $d \in \mathbb{R}^n$ que verifica $Ad = 0$ y $d_i \geq 0$ $\forall i$ tal que $x_i^* = 0$. Se debe mostrar que d es dirección factible, esto es, $\exists \theta > 0$ tal que $x^* + \theta d \in P$. Para esto, se verá que cumple ambas restricciones. Sea $\theta > 0$.

$$\begin{array}{rclcrcll} Ad & = & 0 & \Longrightarrow & \theta Ad & = & 0 & \forall \theta > 0 \\ & & & & b + \theta Ad & = & b & \\ & & & & Ax^* + \theta Ad & = & b & \text{pues } x^* \in P \Rightarrow Ax^* = b \\ & & & & A(x^* + \theta d) & = & b & \end{array}$$

Lo que muestra que cumple la primera restricción. Falta ver que $\exists \theta > 0$ tal que $x^* + \theta d \geq 0$, o equivalentemente $x_i^* + \theta d_i \geq 0$ $\forall i = 1, \dots, n$. Notando que $x^* \in P \Rightarrow x^* \geq 0$, tenemos dos casos:

- i tal que $x_i^* = 0 \implies x_i^* + \theta d_i \geq 0 \iff \theta d_i \geq 0$, lo que se cumple $\forall \theta > 0$, pues $d_i \geq 0 \ \forall i$ tal que $x_i^* = 0$.
- Si i es tal que $x_i^* > 0$, se debe ver que $x_i^* + \theta d \geq 0$. Acá no se tiene ninguna información sobre d, pero pueden ser revisados todos los casos. Si $d_i \geq 0$, se tiene análogamente al punto anterior. Por otro lado, si $d_i < 0$:

$$x_i^* + \theta d \geq 0 \iff \theta d_i \geq -x_i^* \iff \theta \leq -\frac{x_i^*}{d_i} \quad \forall i \text{ tal que } x_i^* > 0, d_i < 0.$$

Luego, basta escoger

$$\bar{\theta} = -\frac{x_i^*}{d_i} > 0$$

con lo cual

$$x_i^* + \bar{\theta} d_i = x_i^* - \frac{x_i^*}{d_i} d_i = x_i^* - x_i^* = 0 \geq 0 \ \ \forall i \text{ tal que } x_i^* > 0, d_i < 0.$$

Con lo que se prueba que para todos los casos $\exists \theta$ tal que $x_i^* + \theta d \geq 0$.

2. Para comenzar notemos que, dado $x^* \in P$, una solución factible d del problema

$$\begin{array}{llrcll} & \text{mín} & c^T d & & & \\ \text{(PL2)} & \text{s.a.} & Ad & = & 0 & \\ & & d_i & \geq & 0 & \quad \forall i \in Z \end{array}$$

verifica $Ad = 0$ y $d_i \geq 0 \ \ \forall i \in Z$. Como Z restringe a las componentes nulas de las soluciones, por la parte 1 tenemos que cualquier d factible en (PL2) es una dirección factible de $x^* \in P$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea x^* óptimo en (PL) y sea d factible en (PL2). Luego, d es una dirección factible para x^* y es posible moverse a través de ella manteniendo la factibilidad, esto es, $x^* + \theta d \in P$ para un $\theta > 0$ adecuado. Como x^* es óptimo, se tiene que la función objetivo de (PL) evaluada en x^* es menor o igual al valor que tendría ésta al evaluar cualquier otro punto, en particular:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{c}^T x^* & \leq & \mathrm{c}^T (x^* + \theta d) \\ \mathrm{c}^T x^* & \leq & \mathrm{c}^T x^* + \theta c^T d \\ 0 & \leq & \mathrm{c}^T d \end{array}$$

Esto indica que cualquier d factible en (PL2) (que representa las direcciones factibles para el punto x^*) tiene valor objetivo mayor o igual a cero si es que x^* es óptimo de (PL). Luego, el valor óptimo será $c^T d^* = 0$ que puede ser alcanzado tomando $d^* = 0$ factible en (PL2) porque cumple ambas restricciones. Cualquier otro valor de d empeora el valor objetivo ($c^T d > 0$) o conduce a una contradicción ($c^T d < 0$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea d^* óptimo de (PL2) tal que $c^T d^* = 0$. Sea $x^* \in P$ y d una dirección factible cualquiera para dicho punto. Se debe mostrar que x^* es óptimo, lo que equivale a que moverse en cualquier dirección empeora el costo (i.e., para θ adecuado, $c^T (x^* + \theta d) \geq c^T x^* \ \ \forall d$ dirección factible). En efecto, con θ adecuado:

$$c^T(x^* + \theta d) = c^T x^* + \theta c^T d \geq c^T x^* + \theta c^T d^* = c^T x^* + \theta \cdot 0 = c^T x^* \quad \forall d \text{ dirección factible}$$

Donde se usó que $c^T d \geq c^T d^*$, pues si d es dirección factible también cumple las restricciones de (PL2).

Asignación de puntaje:

P1.	1. **(3.0 ptos.)**	- **1.5 puntos** por demostrar cada una de las implicancias.
	2. **(3.0 ptos.)**	- **0.6 puntos** por indicar que las soluciones factibles de (PL2) son direcciones factibles para x^*.
		- **1.2 puntos** por demostrar que x^* óptimo $\implies$ (PL2) tiene valor óptimo nulo.
		- **1.2 puntos** por demostrar que si (PL2) tiene valor óptimo nulo $\implies$ x^* es óptimo.

2. Simplex

Considere el siguiente programa lineal.

$$
(\mathrm{P}) \quad
\begin{array}{lrrl}
\text{mín} & -x_2 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & \leq 2 \\
 & x_1 & +x_2 & \geq 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

1. Dibuje el poliedro que corresponde a la región factible del programa lineal arriba. ¿Es un polítopo?
2. Formule un programa lineal equivalente en forma estándar (PE) mediante el uso de variables de holgura en (P).
3. Sea x un punto en (PE) que corresponde al punto $(2,2)$ en el programa lineal original (P). Encuentre una base B que corresponde a x, es decir, si uno fija la base B y construye un punto básico correspondiendo a B (como lo hemos visto en clase), uno obtiene x. Indique también x y cuáles de sus variables son básicas y cuáles son no-básicas.
4. Encuentre todas las direcciones básicas de x.
5. Calcule el costo reducido $\bar{c}_j$ de cada variable x_j. ¿El punto x es óptimo?
6. Selecciona una variable x_j tal que $\bar{c}_j < 0$. Encuentre el valor $\theta^* = \text{máx}\{\theta \geq 0 | x + \theta d^j \in Q\}$ donde Q es el poliedro que corresponde a los puntos factibles del problema (PE). Calcule el punto $x' := x + \theta^* d^j$. Encuentre el punto que corresponde a x' en el programa lineal original (P).

Si tienes que calcular inversas de matrices puedes usar un computador o celular (por ejemplo usando `https://ncalculators.com/matrix/inverse-matrix.htm`).

Pauta Pregunta 2:

1. En la Figura (1) se presenta el poliedro correspondiente a la región factible del problema (P).

   - La primera restricción $x_1 \leq 2$ es la línea vertical en naranjo.
   - La segunda restricción $x_1 + x_2 \geq 4$ es la recta de pendiente negativa en rosado oscuro.
   - La tercera restricción $-x_1 + x_2 \leq 2$ es la recta de pendiente positiva en morado.
   - Las restricciones $x_1, x_2 \geq 0$ están marcadas sobre los ejes, la restricción.
   - **El poliedro que representa a la región factible es la intersección de los semiespacios anteriores, pintado con rosado.**

   Se puede apreciar gráficamente que el poliedro es acotado, por lo tanto es un polítopo.

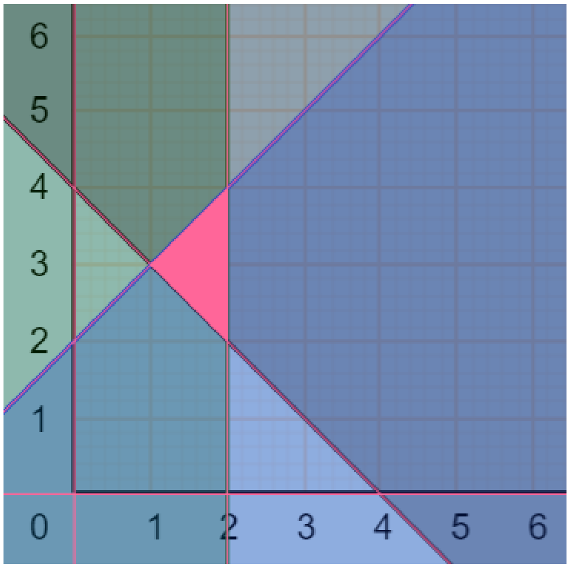

Figura 1: Poliedro correspondiente a la región factible del problema (P).

2. Para que el poliedro esté en forma estándar debe cumplir tres condiciones:

   - Debe ser un problema de minimización.
   - Todas las restricciones deben ser igualdades, a excepción de la naturaleza de las variables.
   - La naturaleza de las variables indica que todas son no negativas.

   El problema ya cumple lo primero y lo tercero, pero falta que las restricciones (exceptuando la naturaleza de las variables) sean igualdades. Para esto, introduciremos variables de holgura que sirven para equilibrar ambos lados de las inecuaciones hasta alcanzar la igualdad. Por lo tanto, se agrega la variable x_3 que se suma en la primera restricción, la variable x_4 que se resta en la segunda restricción y la variable x_5 que se suma en la tercera restricción; todas ellas no negativas. De esta forma, el problema en forma estándar (PE) queda como sigue:

$$
(\text{PE}) \quad \begin{array}{llllllll}
\text{mín} & -x_2 & & & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & & +x_3 & & & = 2 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 4 \\
 & -x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \geq 0 &
\end{array}
$$

3. Considerando al punto $(2,2)$ para el problema (P), se puede identificar que $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$. Como este punto es factible en el problema original y este a su vez es equivalente a (PE), debe cumplir las restricciones:

   - $x_1 + x_3 = 2 \iff 2 + x_3 = 2 \implies x_3 = 0$
   - $x_1 + x_2 - x_4 = 4 \iff 2 + 2 - x_4 = 4 \implies x_4 = 0$
   - $-x_1 + x_2 + x_5 = 2 \iff -2 + 2 + x_5 = 2 \implies x_5 = 2$

Por lo tanto, el vector $x \in \mathbb{R}^5$ de (PE) que representa al punto $(2,2)$ en (P) es $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Notemos que este punto cumple 5 restricciones l.i. de (PE) en forma activa (las tres que caracterizan el poliedro, la naturaleza de x_3 y la de x_4), por lo que es una solución básica (y factible). Además, las variables básicas son x_1, x_2 y x_5; mientras que las no básicas son x_3 y x_4. Por último, la matriz básica corresponde a las columnas de A asociadas a las variables básicas, esto es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Las direcciones básicas asociada a una solución básica factible son los $d^j = -B^{-1}A_j \ \forall j$ tal que x_j es variable no básica, con A_j la columna de la matriz A que corresponde a x_j. Como hay dos variables no básicas, se tienen dos direcciones básicas:

   - $d^3 = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
   - $d^4 = -B^{-1}A_4 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   donde se usó que $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Observación: las componentes asociadas a las variables no básicas son todas cero, a excepción de la j-ésima.

   Así, las direcciones completas son $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. El costo reducido se define como $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$. Se calcularán para las variables no básicas x_3 y x_4.

   - $\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$
   - $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

   Por lo tanto, el punto x no es óptimo porque tiene costos reducidos negativos ($\bar{c}_3$ y $\bar{c}_4$).

6. Como hay dos costos reducidos negativos, se tienen dos desarrollos posibles para esta parte. Uno consiste en que x_3 entre a la base y el otro en que lo haga x_4. Ambos son igual de válidos y sólo se requiere hacer uno.

Caso 1: x_3 entra a la base. Con esto, el nuevo punto será $x' = x + \theta^* d^3$, es decir,

$$x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta^* \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\theta^* \\ 2+\theta^* \\ \theta^* \\ 0 \\ 2-2\theta^* \end{pmatrix}$$

para el cual se debe encontrar θ^* tal que sea factible en (PE) cumpliendo todas sus restricciones. Las que son de la forma $Ax = b$ se cumplen $\forall \theta > 0$:

- $x_1 + x_3 = 2 \iff 2 - \theta + \theta = 2$ ✓
- $x_1 + x_2 - x_4 = 4 \iff 2 - \theta + 2 + \theta - 0 = 4$ ✓
- $-x_1 + x_2 + x_5 = 2 \iff -2 + \theta + 2 + \theta + 2 - 2\theta = 2$ ✓

Para la naturaleza de las variables:

- $x_1 \geq 0 \iff 2 - \theta \geq 0 \iff \theta \leq 2$
- $x_2 \geq 0 \iff 2 + \theta \geq 0 \iff \theta \geq -2$
- $x_3 \geq 0 \iff \theta \geq 0$
- $x_4 \geq 0 \iff 0 \geq 0$ ✓
- $x_5 \geq 0 \iff 2 - 2\theta \geq 0 \iff \theta \leq 1$

Luego

$$\theta^* = \text{máx}\{\theta > 0 | \theta \leq 2, \theta \geq -2, \theta \geq 0, \theta \leq 1\} = \text{máx}\{\theta > 0 | 0 \leq \theta \leq 1\} = 1$$

con lo cual

$$x' = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2+1 \\ 1 \\ 0 \\ 2-2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, como $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, se concluye que esta solución corresponde al punto $(1, 3)$ en (P). La variable que salió de la base es x_5 que ahora está fija en 0.

Observación: puede notarse en el gráfico de la parte 1 que este corresponde a la SBF activa en la segunda y tercera restricción, cumpliendo con holgura la primera restricción.

Caso 2: x_4 entra a la base. Con esto, el nuevo punto será $x' = x + \theta^* d^4$, es decir,

$$x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \theta^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\theta^* \\ 0 \\ \theta^* \\ 2-\theta^* \end{pmatrix}$$

para el cual se debe encontrar θ^* tal que sea factible en (PE) cumpliendo todas sus restricciones. Las que son de la forma $Ax = b$ se cumplen $\forall \theta > 0$:

- $x_1 + x_3 = 2 \iff 2 + 0 = 2$ ✓
- $x_1 + x_2 - x_4 = 4 \iff 2 + 2 + \theta - \theta = 4$ ✓
- $-x_1 + x_2 + x_5 = 2 \iff -2 + 2 + \theta + 2 - \theta = 2$ ✓

Para la naturaleza de las variables:

- $x_1 \geq 0 \iff 2 \geq 0$ ✓
- $x_2 \geq 0 \iff 2 + \theta \geq 0 \iff \theta \geq -2$
- $x_3 \geq 0 \iff 0 \geq 0$ ✓
- $x_4 \geq 0 \iff \theta \geq 0$
- $x_5 \geq 0 \iff 2 - \theta \geq 0 \iff \theta \leq 2$

Luego

$$\theta^* = \max\{\theta > 0 | \theta \geq -2, \theta \geq 0, \theta \leq 2\} = \max\{\theta > 0 | 0 \leq \theta \leq 2\} = 2$$

con lo cual

$$x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2 \\ 0 \\ 2 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, como $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$, se concluye que esta solución corresponde al punto $(2, 4)$ en (P). La variable que salió de la base es x_5 que ahora está fija en 0.

Observación: puede notarse en el gráfico de la parte 1 que este corresponde a la SBF activa en la primera y tercera restricción, cumpliendo con holgura la segunda restricción.

Observación 2:el óptimo en este problema está representado por el punto $(2, 4)$, ya que al compararlo con $(1, 3)$ e incluso $(2, 2)$, el primero es el que minimiza la expresión $\min -x_2$, con $x_2 = 4$. Notar que, aún cuando ambos costos reducidos eran iguales a -1, lo conveniente era que x_4 entrara a la base. De hecho, al seguir iterando, se concluiría que para la solución resultante del caso 1 entra x_4 a la base, mientras que en el caso 2 se obtendría que todos los costos reducidos son positivos. En general, no es posible saber sólo con los costos reducidos cuál es la variable no básica que al entrar a la base permite llegar al óptimo en menos iteraciones, pues esto también depende de cuánto sea posible moverse por la dirección factible (θ^*).

Asignación de puntaje:

P2.	1. **(1.0 pto.)**	- **0.5 puntos** por dibujar el poliedro.
		- **0.5 puntos** por indicar que es un polítopo.
	2. **(1.0 pto.)**	- **0.8 puntos** por incluir las tres variables de holgura para modificar las restricciones.
		- **0.2 puntos** por indicar que estas son no negativas.
	3. **(1.0 pto.)**	- **0.4 puntos** por indicar el vector $x \in \mathbb{R}^5$.
		- **0.3 puntos** por indicar cuáles son las variables básicas y no básicas de x.
		- **0.3 puntos** por indicar la matriz básica asociada a x.
	4. **(1.0 pto.)**	- **0.5 puntos** por cada dirección básica (los d^3 y d^4 con tres componentes).
	5. **(1.0 pto.)**	- **0.3 puntos** por calcular $\bar{c}_3$.
		- **0.3 puntos** por calcular $\bar{c}_4$.
		- **0.4 puntos** por concluir que la base actual no es óptima a partir de lo anterior.
	6. **(1.0 pto.)**	- **0.3 puntos** por escribir las condiciones que debe cumplir θ^* para que x' sea factible en (PE).
		- **0.4 puntos** por encontrar el valor explícito de θ^* y x'.
		- **0.3 puntos** por indicar a qué punto corresponde x' en el problema (P).

3. Simplex

Considere los siguientes problemas en forma estándar:

$$
\text{(a)} \quad \begin{array}{llllllll}
\text{mín} & 3x_1 & & +3x_3 & +x_4 & & & \\
\text{s.a.} & x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = 4 \\
& -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & & +x_5 & = 1 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\text{(b)} \quad \begin{array}{llllllll}
\text{mín} & -2x_1 & -7x_2 & -4x_3 & & +x_5 & \\
\text{s.a.} & -x_1 & +4x_2 & -4x_3 & +x_4 & & = 6 \\
& -2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = 7 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Para cada uno de estos problemas (y comenzando con la base $\{x_4, x_5\}$ para (a) y la base $\{x_2, x_5\}$ para (b)) haga lo siguiente.

1. Muestre que efectivamente está en una SBF. ¿Cuál es la solución que corresponde a esta base?

2. Haga no más de 2 iteraciones del método de Simplex para estos problemas. En cada iteración indique la variable que entra, la dirección factible de movimiento, el valor de θ^* y la solución a la que llega y su nueva base.

3. Luego de estas iteraciones, ¿qué aprendió de estos problemas? ¿llegó al óptimo? ¿son problemas acotados?

Pauta Pregunta 3:

1. (a) En este caso, x_4 y x_5 son variables básicas. Esto indica que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, pues son no básicas. A partir de las restricciones es posible determinar que los valores de $x_B = (x_4, x_5)$ son $(4, 1)$. Luego, $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Como las soluciones de este problema están en $\mathbb{R}^5$, para que x sea SBF debe cumplir 5 restricciones linealmente independientes de forma activa y ser factible. En efecto, se verifican las siguientes:

   - $x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \iff 0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$ ✓
   - $-2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 1 \iff -2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$ ✓
   - $x_1 = 0 \iff 0 = 0$ ✓
   - $x_2 = 0 \iff 0 = 0$ ✓
   - $x_3 = 0 \iff 0 = 0$ ✓

   Donde las tres últimas se obtuvieron de las restricciones de naturaleza de las variables. Todas estas restricciones son l.i., ya que sus vectores característicos (es decir, las filas de la matriz A) no pueden escribirse como combinación lineal el uno del otro (no es necesario mostrarlo formalmente, pero si se desea hacerlo notar que $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y los que caracterizan a las restricciones de naturaleza de las variables son los unitarios e_i compuestos únicamente por ceros y un 1 en la posición i; con $i \in \{1, 2, 3\}$). Además, es factible porque cumple todas las restricciones.

   (b) Ahora las variables básicas corresponden a x_2 y x_5, por lo que $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. De las restricciones de (b) se obtiene que $x_2 = \frac{3}{2}$ y $x_5 = 10$. Luego, las solución correspondiente es el vector $x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Este es activo en las siguientes restricciones

   - $-x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 6 \iff -0 + 4 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot 0 + 0 = 6$ ✓
   - $-2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 7 \iff -2 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 0 + 10 = 7$ ✓
   - $x_1 = 0 \iff 0 = 0$ ✓
   - $x_3 = 0 \iff 0 = 0$ ✓
   - $x_5 = 0 \iff 0 = 0$ ✓

Estas restricciones son l.i. por la misma razón descrita para el problema (a) (en este caso, son l.i. los vectores $a_1 = \begin{pmatrix}-1 & 4 & -4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix}-2 & -2 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}, e_1, e_3$ y e_4). Luego, el punto x encontrado cumple 5 restricciones l.i. de forma activa y además cumple todas las restricciones, por lo que es una SBF.

2. (a) $\boxed{\text{Iteración 1}}$

Para este problema, dado $x_B = (x_4, x_5)$, tenemos los siguientes valores de A, B y c_B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con ellos, es posible calcular los costos reducidos de las variables no básicas.

- $\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = 3 - \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$
- $\bar{c}_2 = c_2 - c_B^T B^{-1} A_2 = 0 - \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -(-2) = 2$
- $\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = 3 - \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 - (-2) = 5$

Como todos los costos reducidos son positivos, la solución actual $x^* = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$ es óptima y se detiene el algoritmo.

(b) $\boxed{\text{Iteración 1}}$

En este problema $x_B = (x_2, x_5)$ y se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los costos reducidos de las variables no básicas son

- $\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = -2 - \begin{pmatrix}-7 & 1\end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 - \begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 - \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{4}$
- $\bar{c}_3 = c_3 - c_B^T B^{-1} A_3 = -4 - \begin{pmatrix}-7 & 1\end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 - \begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 - 8 = -12$
- $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 0 - \begin{pmatrix}-7 & 1\end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-\frac{5}{4} & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$

Como $\bar{c}_1 < 0$ y $\bar{c}_3 < 0$ es posible escoger x_1 o x_3 para que entren a la base. Ambos casos son igualmente válidos.

Caso 1: x_1 entra a la base.
La dirección básica asociada es

$$d^1 = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Como d^1 no tiene componentes negativas, el problema es no acotado y se detiene el algoritmo.

Caso 2: x_3 entra a la base.
La dirección básica asociada es

$$d^3 = -B^{-1}A_3 = -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde, por la estructura de la matriz básica, la primera componente está asociada a x_2 y la segunda a x_5. Como d^3 tiene al menos una componente negativa, es posible encontrar la cantidad θ^* que es posible moverse.

$$\theta* = \min_{i|d_i<0}\left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_i}\right\} = \min\left\{-\frac{10}{-1}\right\} = 10$$

Con esto, $\theta^* = 10$ y la variable que sale es x_5. El vector actualizado es $x' = x + \theta^* d$:

$$x + \theta^* d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{23}{2} \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las variables básicas son $x_B(x_2, x_3)$ y las no básicas son $x_N = (x_1, x_4, x_5)$. Luego, la matriz básica es

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Iteración 2}}$

Tenemos $x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{23}{2} & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

por lo que los costos reducidos de las variables no básicas son

- $\bar{c}_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} A_1 = -2 - \begin{pmatrix} -7 & -4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 - \begin{pmatrix} -\frac{29}{4} & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 - \left(\frac{29}{4} + 22\right) = -2 - \frac{117}{4} = -\frac{125}{4}$
- $\bar{c}_4 = c_4 - c_B^T B^{-1} A_4 = 0 - \begin{pmatrix} -7 & -4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{29}{4} & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{29}{4}$
- $\bar{c}_5 = c_5 - c_B^T B^{-1} A_5 = 1 - \begin{pmatrix} -7 & -4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - \begin{pmatrix} -\frac{29}{4} & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - (-11) = 12$

El único costo reducido negativo es $\bar{c}_1$, por lo que escogemos a x_1 para que entre a la base. La dirección asociada es

$$d^1 = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Como ninguna componente de d^1 es negativa, el problema es no acotado (se puede esocger libremente $\theta^* \to \infty$ sin violar la factibilidad, pues $x + \theta^* d$ es no negativa $\forall \theta > 0$ y entonces se puede disminuir infinitamente el valor de la función objetivo). La dirección de movimiento completa es $\begin{pmatrix} 1 & \frac{11}{4} & \frac{5}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Con respecto al problema (a), se obtuvo que este alcanza el óptimo con $x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Es un problema acotado ya que el valor óptimo es finito.
   En cuanto al problema (b), resulta que es un problema no acotado (el valor óptimo tiende a $-\infty$), ya que se obtienen direcciones básicas con todas sus componentes positivas. Se llega a esta conclusión independientemente de la variable que entra a la base en la primera iteración.

Asignación de puntaje:

P3.	1. **(1.0 pto.)**	- **0.2 puntos** por encontrar la solución asociada a la base de (a). - **0.2 puntos** por encontrar la solución asociada a la base de (b). - **0.3 puntos** por mostrar que la solución de (a) es SBF. - **0.3 puntos** por mostrar que la solución de (b) es SBF. Observación: para mostrar que son SBF se debe indicar que las soluciones son factibles, cumplen 5 restricciones de forma activa y que estas son l.i.
	2. **(4.0 ptos.)**	- **1.0 punto** por calcular $\bar{c}$ para (a) y detenerse. - **1.0 punto** por calcular $\bar{c}$ para (b) a partir de la base dada. - Si en (b) entra x_1 **1.0 punto** por calcular d^1 y **1.0 punto** por detener el algoritmo. - Si en (b) entra x_3 **0.5 puntos** por calcular d^3 y θ^*, **0.5 puntos** por obtener el nuevo punto y su base. En la segunda iteración, **0.5 puntos** por calcular $\bar{c}$, **0.5 puntos** por calcular d^1 y detener el algoritmo.
	3. **(1.0 pto.)**	- **0.5 puntos** por indicar que el problema (a) alcanza el óptimo y es acotado. - **0.5 puntos** por indicar que el problema (b) es no acotado. Observación: se debe argumentar cada conclusión, no basta con decir ”es acotado”. Puede que el estudiante haya justificado en la parte 2 al detener el algoritmo (diciendo, por ejemplo, que el problema es no acotado porque todas las direcciones básicas son positivas).