Tarea 2

Dualidad y conjuntos convexos

Problema 1 (4.4 Bertsimas y Tsitsiklis)

Sea A una matriz cuadrada simétrica. Considera el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c'x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \geq c \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Prueba que si x* satisface $Ax^* = c$ y $x^* \geq 0$, entonces x^* es una solución óptima.

Solución

Dado que A es simétrica, el problema dual es

$$\begin{aligned} \max_{p} \quad & p'c \\ \text{s.a.} \quad & Ap \leq c \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

Si una solución primal factible x^* satisface $Ax^* = c$, también es dual factible. Además, tiene el mismo costo primal y dual $c'x^*$. Por lo tanto, es una solución óptima de ambos problemas.

Problema 2 (4.10 Bertsimas y Tsitsiklis)

Considera el problema en forma estándar de minimizar $c'x$ sujeto a $Ax = b$ y $x \geq 0$. Definimos el *Lagrangeano* como

$$L(x, p) = c'x + p'(b - Ax)$$

Considera el siguiente "juego": el jugador 1 elige algún $x \geq 0$, y el jugador 2 elige algun p; luego, el jugador 1 paga al jugador 2 el monto $L(x, p)$. El jugador 1 quiere minimizar $L(x, p)$, mientras el jugador 2 quiere maximizarlo.
Un par (x^*, p^*) con $x \geq 0$, es llamado "punto de equilibrio" si

$$L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*), \ \forall x \geq 0, \forall p$$

(Por lo tanto, tenemos un equilibrio si ningún jugador puede mejorar su resultado modificando unilateralmente su elección).

Muestra que un par (x^*, p^*) es un equilibrio si y solo si x^* y p^* son soluciones óptimas al problema en forma estándar bajo consideración y su dual, respectivamente.

Solución

Supongamos que x^* y p^* son soluciones óptimas del primal y dual respectivamente. Por demostrar que ellos son un equilibrio.
Dado que $Ax^* = b$, obtenemos $L(x^*, p) = c'x^* = L(x^*, p^*)$, esto prueba la primera desigualdad. Dado que p^* es dual factible, tenemos $(c' - (p^*)'A) \geq 0'$. Por temorema de dualidad, $c'x^* = (p^*)'b$. Por lo tanto, para cada $x \geq 0$, obtenemos

$$L(x, p^*) = (c' - (p^*)'A)x + (p^*)'b \geq (p^*)'b = c'x^* = L(x^*, p^*)$$

Ahora probamos la conversa. Supongamos que $x^* \geq 0$ y p^* estan en equilibrio. La desigualdad $L(x^*, p) \leq L(x^*, p^*)$ implica que $p'(b - Ax^*) \leq (p^*)'(b - Ax^*)$ para todo p. Esto solo puede pasar si $Ax^* = b$, lo que establece la factibilidad primal de x^*.
Además, la desigualdad $L(x^*, p^*) \leq L(x, p^*)$ lleva a $c'x \leq (c' - (p^*)'A)x + (p^*)'b$. Dado que esto debe ser cierto para todo $x \geq 0$, debemos tener $c' - (p^*)'A \geq 0'$ y p^* es dual factible. Habiendo probado esto, sigue que $c'x \leq (p^*)'b$. Por dualidad débil, concluimos que $c'x = (p^*)'b$ y sigue que x^* y p^* son soluciones óptimas del primal y dual respectivamente.

Problema 3 (4.16 Bertsimas y Tsitsiklis)

Da un ejemplo de un par de problemas de programación lineal (primal y dual), en que ambos tengan múltiples soluciones óptimas.

Solución

Consideremos el problema de minimizar $0'x$ sujeto a $0'x = 0$. Su dual es el mismo problema. Cada vector es una solución óptima.

Problema 4 (4.34 Bertsimas y Tsitsiklis)

Considera un poliedro P que tenga al menos un punto extremo.

(a) Supongamos que nos entregan los puntos extremos $x^{\hat{\imath}}$ y un conjunto completo de rayos extremos w^j de P. Crea un problema de programación lineal cuya solución entregue un hiperplano separador que separe P del origen, o permita concluir que no existe.

(b) Ahora supongamos que nos dan P en la forma $P = \{x | a_i' x \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}$. Supongamos que $0 \notin P$. Explica cómo puede ser encontrado un hiperplano separador.

Solución

(a) Consideremos el siguiente conjunto de desigualdades lineales en el vector desconocido c:

$$c'x^i \leq -1, \ \forall x^i \quad c'w^j \leq 0, \ \forall w^j$$

Supongamos que $0 \notin P$. Argumentamos que estas desigualdades tienen una solución factible. Por el teorema del hiperplano separador, existe algún c tal que $c'x < 0$ para todos los puntos extremos x^i. Escalando c, obtenemos un nuevo vector c tal que $c'x^i \leq -1$ para todo i. Notar que $x^i + \theta w^j$ pertenece a P para todo $\theta > 0$. Por lo tanto, $c'(x^i + \theta w^j < 0$ para todo $\theta > 0$, lo que implica que c satisface $c'w^j \leq 0$. Además, es una consecuencia del teorema de resolución que cualquier solución c de este sistema

de desigualdades satisface $c'x \leq -1$ para todo $x \in P$. Concluimos que un hiperplano separador puede ser encontrado resolviendo este sistema de desigualdades.
Supongamos ahora que $0 \in P$. Luego, 0 puede ser expresado de la forma

$$0 = \sum_i \lambda_i x^i + \sum_j \theta_j w^j,$$

donde $\sum_i \lambda_i = 1$ y λ_i, θ_j son todos no negativos. Tomando el producto interno con c, obtenemos una contradicción al sistema de desigualdades, lo que es infactible.

(b) Dado que $0 \notin P$, existe algun i para el que $b_i > 0$. Entonces tenemos $a_i'0 = 0 < b_i/2$. Por otro lado, cada $x \in P$ satisface $a_i'x \geq b_i > b_i/2$ y a_i es un hiperplano separador.

Problema 5 (2.12 Boyd y Vanderberghe)

Cuáles de los siguientes conjuntos son convexos?

(a) Un bloque, un conjunto de la forma $\left\{x \in R^n | \alpha \leq a^T x \leq \beta\right\}$.

(b) Un rectángulo, un conjunto de la forma $\{x \in R^n | \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, \ldots, n\}$.

(c) Una cuña, $\left\{x \in R^n | a_1^T x \leq b_1, a_2^T x \leq b_2\right\}$.

(d) El conjunto de puntos más cercano a un punto que a otro conjunto, $\{x | ||x - x_0||_2 \leq ||x - y||_2, \forall y \in S\}$.

(e) El conjunto de puntos más cercano a un conjunto que a otro $\{x | dist(x, S) \leq dist(x, T)\}$.

(f) El conjunto $\{x | x + S_2 \subseteq S_1\}$, donde $S_1, S_2 \subseteq R^n$ con S_1 convexo.

(g) El conjunto de puntos cuya distancia a a no excede una fracción fija $/theta$ de la distancia a b, el conjunto $\{x | ||x - a||_2 \leq \theta ||x - b||_2\}$.

Solución

(a) Un bloque es una intersección de dos semiespacios, por lo tanto, es un conjunto convexo.

(b) Un rectángulo es una intersección finita de semiespacios, por lo tanto, es un conjunto convexo.

(c) Una cuña es una intersección de dos semiespacios, por lo tanto es convexo.

(d) Es un conjunto convexo, ya que puede ser expresado de la forma

$$\bigcap_{y \in S} \{x | ||x - x_0||_2 \leq ||x - y||_2, \forall y \in S\}$$

lo que es una intersección de semiespacios.

(e) En general, este conjunto no es convexo, como se muestra en el siguiente ejemplo en R. Con $S = \{-1, 1\}$ y $T = \{0\}$, tenemos

$$\{x | dist(x, S) \leq dist(x, T)\} = \{x \in R | x \leq -1/2 o x \geq 1/2\}$$

lo que no es convexo.

(f) Este conjunto es convexo. $x + S_2 \subseteq S_1$ si $x + y \in S_1$ para todo $y \in S_2$. Por lo tanto,

$$\{x|x + S_2 \subseteq S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} \{x|x + y \in S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} \{S_1 - y\},$$

la intersacción de conjuntos convexos $S_1 - y$.

(g) Este conjunto es una bola convexa

$$\{x|||x - a||_2 \leq \theta||x - b||_2$$

$$= \left\{x|||x - a||_2^2 \leq \theta^2||x - b||_2^2\right\}$$

$$= \left\{x|(1 - \theta^2)x^T x - 2(a - \theta^2 b)^T x + (a^T a - \theta^2 b^T b) \leq 0\right\}$$

Si $\theta = 1$, es un semiespacio. Si $\theta < 1$, es una bola

$$= \left\{x|(x - x_0)^T (x - x_0) \leq R^2\right\}$$