Tarea 1 Mecánica Estadística

Gas Ideal y Microcanónico

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- El hamiltoniano de un sistema de N partículas indistinguibles ultrarelativistas está dado por

$$\mathcal{H}(p_i, q_i) = \sum_i^N c|p_i| + U(q_i)$$

En este sistema diremos que $U(q_i) = 0$ para $0 \leq q_i$ y $U(q_i) = \infty$ en otros casos. Considere un ensamble microcanónico con energía E.

1. Calcule la contribución de las coordenadas q_i al volumen disponible en el espacio de fase, $\Omega(E, L, N)$
2. Calcule ahora la contribución del momento a $\Omega(E, L, N)$.
   Hint: El volumen de la hiper-pirámide definida por $\sum_{i=1}^d x_i \leq R$, y $x_i \geq 0$ en d dimensiones es $R^d/d!$.
3. Calcule la entropía del sistema, $S(E, L, N)$.
4. Calcule la presión P en una dimensión.
5. Obtenga las capacidades caloríficas C_L y C_p.
6. ¿Cual es la probabilidad $p(p_1)$ de encontrar una partícula con momento p_1?

Pauta P1.-

1. Recordemos que si denotamos $\Omega_q(E, L, N)$ como la contribución de las coordenadas q_i al volumen correspondiente al macroestado (E, L, N) en el espacio de fases, y Ω_p como el aporte de p_i, entonces el volumen total se denota como

   $$\Omega(E, L, N) = \frac{1}{h^N N!}\frac{\Omega_q}{\Omega_p}$$

   En este caso, ya que L denota el espacio ocupado por las partículas, cada partícula puede ocupar un volumen en una dimensión de L, y como todas son independientes y no chocan entre sí, $\Omega_q = L^N$.

2. Debemos integrar en una superficie del espacio de momentos definido por la restricción $\sum_i^N c|p_i| = E$, y multiplicar esta expresión por 2^N, ya que el aporte de cada partícula es en realidad el doble, pues para una serie de valores de $|p_i|$ existen dos alternativas posibles, p_i o $-p_i$. El

$$\Omega_p = 2^N \int_{\sum_i^N c|p_i|=E} d^{3N}p$$

La integral corresponde a una superficie de hiperpirámido de radio E/c, y podemos aproximar los microestados en un intervalo de energía diferenciando el volumen por E:

$$\begin{aligned}
\Omega_p &= 2^N \int_{\sum_i^N c|p_i|=E} d^{3N}p \\
&= 2^N \frac{d}{dE} \int_{\sum_i^N c|p_i|=E} d^{3N}p \\
\text{Hint} \Rightarrow &= 2^N \frac{d}{dE}(E/c)^N/N! \\
&= \left(\frac{2}{c}\right)^N \frac{E^{N-1}}{(N-1)!}
\end{aligned}$$

3. El volumen total es

$$\Omega(E,N,L) = \frac{1}{h^N N!(N-1)!}\left(\frac{2L}{c}\right)^N E^{N-1}$$

Para $N >> 1$, tenemos que $\ln N! \approx N \ln N - N$ y $N - 1 \approx N$. La entropía es

$$\begin{aligned}
S(E,N,L) &= k_b \ln \Omega(E,N,L) \\
&= k_b \ln \frac{1}{h^N (N!)^2}\left(\frac{2L}{c}\right)^N E^N \\
&\approx k_n \left(N \ln \frac{2LE}{ch} - 2(N\ln N - N)\right) \\
&= k_b N \ln \frac{2e^2 LE}{hcN^2}
\end{aligned}$$

4. Recordemos que $dE = TdS - PdL \Rightarrow P = T\frac{\partial S}{\partial L}|_{E,N} = \frac{NK_bT}{L}$

5. Sabemos que $C_L = \frac{\partial E}{\partial T}_{L,N}$ y $C_p = \frac{\partial E}{\partial T}_{P,N} + P\frac{\partial L}{\partial T}|_{P,N}$, así que debemos encontrar alguna expresión para la energía. Podemos usar otra vez la primera ley:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}|_{L,N} = \frac{Nk_B}{E} &\Rightarrow E = TNk_b \\
&\Rightarrow C_L = Nk_b \\
P = \frac{NK_bT}{L} &\Rightarrow C_p = Nk_b + P\frac{Nk_b}{P} = 2Nk_b
\end{aligned}$$

6. Si fijamos el momento de una partícula, entonces es trabajo de todas las demás hacer que la suma de las energías individuales de E. Es decir, que al fijar un momento, podemos calcular el volumen del resto del sistema, con energía $E - |p_1|$. Esto es por que en un sistema con un p_1 fijo, podemos tratar la partícula como su propio sistema con volumen $\Omega(c|p_1|, L, 1)$ y el resto como un sistema con volumen $\Omega(E - c|p_1|, L, N-1)$, dando un volumen total de $\Omega_{p_1} = 1/N\Omega(E - c|p_1|, L, N-1)\Omega(p = p_1, L, 1)/N$. La proporción entre el volumen de este sistema, y el sistema original, es el valor que buscamos

$$\begin{aligned}
p(p_1) &= \frac{\Omega_{p_1}(E, L, N)}{N\Omega(E, L, N)} = \frac{\Omega(c|p_1|, L, 1)\Omega(E - c|p_1|, L, N-1)}{\Omega(E, L, N} \\
&= \frac{\frac{L}{Nh}(2L)^{N-1}\frac{1}{h^{N-1}(N-1)!}\sqrt{N-1}\frac{(E/c - |p_1|)^{N-2}}{(N-2)!}}{\frac{1}{h^N N!}(2L)^N\sqrt{N}\frac{(E/c)^{N-1}}{(N-1)!}} \\
&= \sqrt{\frac{N-1}{N}}(N-1)\frac{c}{E}\left(\frac{E - c|p_1|}{2E}\right)^{N-2} \\
N - 2 \approx N \Rightarrow &= \sqrt{\frac{N-1}{N}}(N-1)\frac{c}{2E}\left(1 - \frac{c|p_1|}{E}\right)^{N} \\
N \to \infty &= \frac{cN}{2E}\exp\left(-\frac{c|p_1|N}{E}\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando $E = Nk_bT$, $p(p_1) = \dfrac{c}{2k_bT}\exp\left(-\dfrac{c|p_1|N}{Nk_bT}\right)$

P2.-

1. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad que al menos uno salga 3?

2. Se saca una carta al azar desde un mazo estándar (baraja inglesa) de 52 cartas (no hay jokers). ¿Cuál es la probabilidad que sea una reina ó un corazón?

3. Se lanza cinco monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad que el número de caras exceda el número de sellos?

4. Cuatro mujeres y tres hombres toman lugares aleatorios en una cola. ¿Cuál es la probabilidad que todos los hombres estén a la cabeza de la cola?

5. Un síntoma clave del estrés es el dolor de estómago. Por el momento, se sabe que una de cada diez personas está estresada. La probabilidad que una persona tenga dolor de estómago si está estresada es 0.7, y 0.2 si no.

   - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga dolor de estómago y esté estresada?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga dolor de estómago pero no esté estresada?
   - Una persona se levanta con malestar estomacal, ¿Cuál es la probabilidad de que esté estresado?

6. En un concurso de televisión le muestran tres cajas. Le dicen que dos están vacías y que una tiene un reloj de oro. Las reglas son: Debe elegir una caja, pero no abrirla. El conductor, que sabe cuál es la caja que tiene el reloj, abrirá una de las dos otras cajas y le mostrará que está vacía. Le da la opción de cambiar de elección de caja. ¿Le conviene hacerlo?

Pauta P2.-

1. Hay tres maneras: O ambos tiene 3, o uno tiene 3 y el otro tiene 6 opciones, o el otro sale 3 y uno tiene 6 opciones. 11/36

2. Hay 13 corazones y 3 reinas que no son corazones. $16/52 = 4/13$.

3. Ya que el número de caras es impar, por simetría es 1/2.

4. Los casos totales son 7!, y si tengo tres hombres a la cabeza, los puedo ordenar de 3! formas y a las mujeres de 4!. La probabilidad es entonces $3!4!/7! = 1/35$

5. Digamosle A al evento de dolor, y B al evento de estrés.
   - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = 0{,}7$
   - $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A|B^c)(1 - \mathbb{P}(B)) = 0{,}18$
   - $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$ y $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0{,}25$, por lo tanto $\mathbb{P}(B|A) = 0{,}28$

6. Tiene 2/3 de probabilidades de elegir una caja sin premio, y si se decide cambiar, se ganará el premio. En cambio, tiene 1/3 de probabilidades de elegir una caja con el premio, y si se decide cambiar, no ganará. Así, si es que se cambia de caja, hay un 2/3 de probabilidades de que se haya elegido una caja sin premio, y por lo tanto, de ganar el premio. Si es que no se decide cambiar de caja, se tiene solo 1/3 de probabilidades de ganar.

P3.-

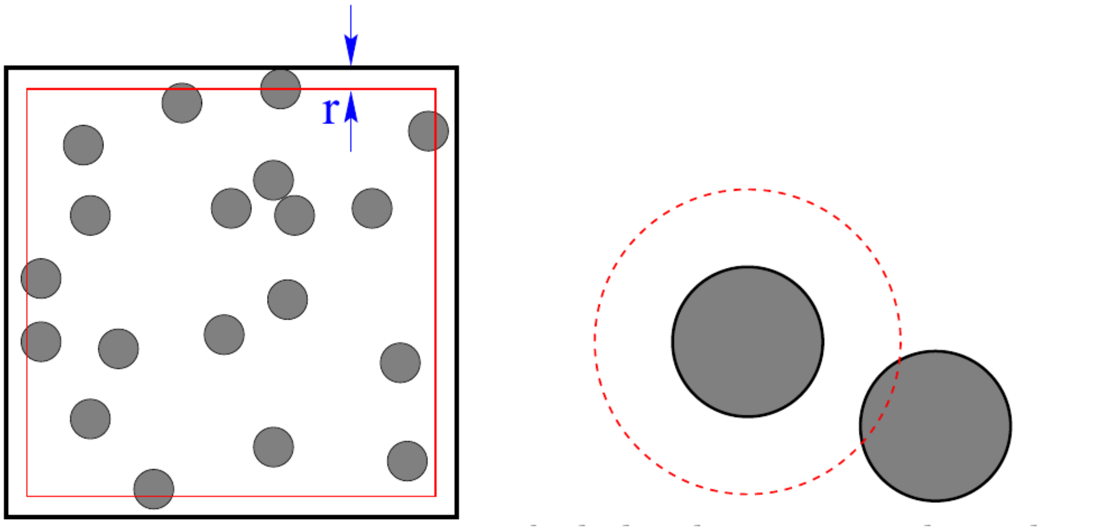

Figura 1: Estamos estudiando un sistema donde las partículas tienen un radio determinado.

Para hacer más realista la descripción de un gas ideal, considere los átomos que ya no son puntos si no que tiene un radio r pequeño. Supongamos que la interacción es infinita dentro del radio y cero afuera, es decir, los átomos son esferas solidas de radio r. Trabajaremos en dos dimensiones. Considere una caja cuadrada de lado L con paredes duras y N discos indistinguibles de radio $r << L$. El gas es diluido: $N\pi r^2 << L^2$. El area permitida para un disco en la caja es $A = (L-2r)^2$.

1. El área permitida para un segundo disco es $A - \pi(2r)^2$. Encuentre el volumen $2N$ dimensional en el espacio de configuraciones que está disponible para este gas, si la energía total es $E = 0$. Exprese su respuesta como un producto de N términos y escriba explícitamente todas las aproximaciones que haga.

2. Muestre que la entropía de configuración, S_c, correspondiente al número de estados anterior puede escribirse, en el límite $N >> 1$, como

$$S_c = Nk_b(1 + \ln(A/N - b))$$

¿Cual es el valor de b?

3. Encuentre ahora la entropía del sistema cuando $E > 0$. Deduzca la presión y la ecuación de estado. ¿Hay un límite en el que se reduzca a la ecuación del gas ideal?

Pauta P3.-

1. Como al añadir un disco el area disponible disminuye en $\pi(2r)^2$, entonces el area disponible para el i-ésimo disco es $A_i = A - (i-1)\pi(2r)^2$. De esta manera, el volumen en el espacio de

configuraciones es

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \frac{1}{h^{2N}N!}\Pi_{i=1}^{N}(A-(i-1)\pi(2r)^2) \\
&= \frac{A^{2N}}{N!}\Pi_{i=1}^{N}\left(1-(i-1)(2r)^2\frac{\pi}{A}\right)
\end{aligned}
$$

Ya que las partículas son indistinguibles y E_0, es decir, no hay aporte de volumen por parte del momento. Haremos las aproximaciones cuando le apliquemos el logaritmo.

2. La entropía es:

$$
\begin{aligned}
S_c &= k_b\left(N\ln\frac{A}{h^2} - N\ln N + N + \sum_{i=1}^{N}\ln\left(1-(i-1)(2r)^2\frac{\pi}{A}\right)\right) \\
\ln(1+ax)\approx ax,\ N>>1 \Rightarrow &= k_b\left(N\ln\frac{Ae}{h^2} - N\ln N + N - (2r)^2\frac{\pi}{A}\sum_{i=1}^{N}(i-1)\right) \\
&= k_bN\left(\ln\frac{A}{N} + 1 - (2r)^2\frac{\pi}{AN}\left(\frac{N(N-1)}{2}\right)\right) \\
N-1\approx N \Rightarrow &= k_bN\left(1+\ln\frac{A}{N} - (2r)^2\frac{\pi N}{2A}\right) \\
&= k_bN\left(1+\ln\frac{A}{N} - \frac{2\pi^2 N}{A}\right) \\
&\approx k_bN\left(1+\ln\frac{A}{N} + \ln\left(1-\frac{2\pi^2 N}{A}\right)\right) \\
&= k_bN\left(1+\ln\left(\frac{A}{N}-2\pi r^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Así, para nuestro sistema, el valor de b es simplemente $2\pi r^2$.

3. Con energía positiva, debemos calcular el aporte del momento Ω_p al volumen en el espacio de configuración. En clases vimos que

$$
\begin{aligned}
\Omega_p &= \frac{1}{h^2}\left(\frac{2\pi e}{3N}\right)^{3N/2}(2m)^{\frac{3N-1}{2}}E^{\frac{3N}{2}} \\
\Rightarrow S &= S_c + k_b\ln\Omega_p \\
&= S_c + k_bN\left(\frac{3}{2}+\ln\left(\frac{4\pi mE}{3N}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= k_bN\left(\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{A}{N}-2\pi r^2\right)+\ln\left(\frac{4\pi mE}{3N}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= k_bN\left(\frac{5}{2}+\ln\left(\left(\frac{A}{N}-2\pi r^2\right)\left(\frac{4\pi mE}{3N}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

La presión entonces está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{P}{T} &= \frac{\partial S}{\partial A}|_E \\
&= k_b \frac{1}{\left(\frac{A}{N} - 2\pi r^2\right)} \\
\rightarrow P &= T k_b \frac{N}{A - 2N\pi r^2}
\end{aligned}$$

En un gas ideal, la ecuación sería $P = \frac{TNk_b}{A}$, así que se reduce a la ecuación del gas ideal cuando $r \rightarrow 0$.