Auxiliar 10 Mecánica Estadística

Gases débilmente cuánticos y gas de Fermi degenerado

Profesor: Fernando Lund
Auxiliar: Miguel Sepúlveda

P1.- En el caso de un gas ideal de partículas no relativistas de spin s, a temperatura T y en un volumen V en tres dimensiones, se tienen las relaciones para la densidad de partículas $n = N/V$ y la presión como

$$n = g_0(k_bT)^{3/2}\Gamma(3/2)g_{3/2}(z)$$
$$p = \frac{2g_0}{3}(k_bT)^{5/2}\Gamma(5/2)g_{5/2}(z)$$

Para bosones y

$$n = g_0(k_bT)^{3/2}\Gamma(3/2)f_{3/2}(z)$$
$$p = \frac{2g_0}{3}(k_bT)^{5/2}\Gamma(5/2)f_{5/2}(z)$$

para fermiones. N es el número de partículas, p la presión, g_0 la degeneración por estado, $z << 1$, y

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x + 1}dx$$
$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{x^{n-1}dx}{z^{-1}e^x - 1}dx$$

1. Usando que cuando $z < 1$

$$\frac{1}{1 \pm z^{-1}e^x} = \mp\sum_{k=1}^{\infty}(\mp ze^{-x})^k$$

   y la definición de la función gamma

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

   Encuentre una expansión en serie para $f_n(z)$ y $g_n(z)$, sin aplicar $z << 1$

2. Desarrolle hasta orden z^2 las expresiones para la densidad y la presión.

3. Invierta la relación $N = N(z)$ hasta el mismo orden para obtener $z = z_1n + z_2n^2$

4. Reemplace en la presión para obtener hasta el mismo orden una expresión del tipo $p = p_1 n + p_2 n^2$. Muestre que $p_{boson} < p_{boltzmann} < p_{fermion}$. ¿Como interpretaría este resultado?

$\boxed{\textbf{P2.-}}$ Considere un gas de N fermiones con spin $1/2$, en un volumen V, y la expansión de Sommerfield

$$\int_{\epsilon_0}^{\infty} \frac{H(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}+1} = \int_{\epsilon_0}^{\mu} H(\epsilon)d\epsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2}H'(\mu) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu\beta}\right)^4$$

1. Cuando la temperatura es muy cercana a 0, ¿Que puede decir sobre la ocupación de los niveles de energía del gas?
2. Calcule la energía de Fermi ϵ_F
3. Use la expansión de Sommerfield para aproximar μ, en términos de ϵ_F y los datos.
4. Aproxime ahora la energía media $\langle E\rangle$ para temperaturas bajas, en términos de ϵ_F y los datos.
5. En base a lo anterior, encuentre una expresión para la capacidad calórica a volumen constante C_V. Definiendo $T_F = \epsilon_F/k_b$ como la temperatura de Fermi, y considerando que el valor clásico es $C_V = 3Nk_b/2$, comente sobre este resultado. ¿Qué pasa en metales a temperatura ambiente?