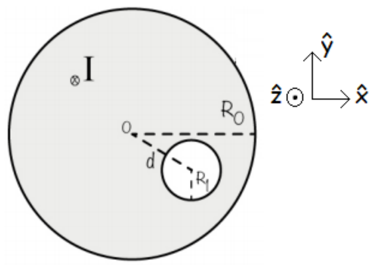
FI2002-2 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Desarrollo P2 Control.

16 de Julio de 2020

P2. Cable co-axial asimétrico:

Se tiene un cable cilíndrico de radio R_0 con una cavidad cilíndrica de radio R_1 dentro de él, con una separación d entre sus centros, tal como se muestra en la siguiente figura:



Ya que el agujero rompe la simetría axial con respecto al eje del cilindro, no es posible usar ley de Ampère, por otro lado usar ley de Biot-Savart directamente resulta complicado al momento de plantearse los límites de integración. Sin embargo, inspirándose en la P1 del Auxiliar 4 podemos interpretar el agujero cilíndrico con corriente *nula* simplemente como la suma de dos cilindros con densidades de corriente opuestas. De esta forma, usando el principio de superposición, es posible calcular el campo magnético de nuestro cilindro asimétrico como la suma del campo magnético creado por el cilindro completo con densidad de corriente $\vec{J}$ más el campo magnético creado por el cilindro imaginario del agujero con densidad de corriente $-\vec{J}$.

Entonces partamos por encontrar $\vec{J}$. Como nos dicen que la corriente es homogénea dentro del cilindro, entonces nuestra densidad de corriente es uniforme, por lo tanto la magnitud de esta densidad puede calcularse directamente con la corriente I y con el área transversal de nuestra **configuración real**, es decir, el área transversal del cilindro completo menos el área transversal del agujero, así:

$$J = \frac{I}{A} \;\Rightarrow\; J = \frac{I}{\pi(R_0^2 - R_1^2)}$$

Entonces, denotando $\vec{J_1}$ y $\vec{J_2}$ a las densidades de corriente del cilindro macizo de radio R_0 y al cilindro imaginario de radio R_1, respectivamente, y usando el sistema de ejes cartesianos mostrado en la figura anterior, se tiene que:

$$\vec{J_1} = -\frac{I}{\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z} \quad ; \quad \vec{J_2} = \frac{I}{\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z}$$

Ahora, con ley de Ampère es sencillo conocer el campo magnético desde el centro de cada cilindro. Para el cilindro macizo, en el caso $r \leq R_0$ la corriente enlazada es una porción de la corriente total, la cual puede ser calculada con la densidad de corriente $\vec{J}$:

$$I_{enl} = \int \vec{J_1} \cdot d\vec{S} \;\Rightarrow\; I_{enl} = -\frac{I}{\pi(R_0^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^r r dr d\theta \;\Rightarrow\; I_{enl} = -\frac{Ir^2}{(R_0^2 - R_1^2)}$$

Entonces, con ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \;\Rightarrow\; 2\pi r B_1(r) = -\frac{\mu_0 I r^2}{(R_0^2 - R_1^2)} \;\Rightarrow\; \vec{B}_1(r) = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{\theta} \;\;;\;\; r \leq R_0 \tag{1}$$

Por otro lado, para $r > R_0$ la corriente enlazada I_{enl} se obtiene de la misma forma, pero integrando desde 0 a R_0, y entonces:

$$I_{enl} = \int \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} \;\Rightarrow\; I_{enl} = -\frac{I}{\pi(R_0^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} r dr d\theta \;\Rightarrow\; I_{enl} = -\frac{I R_0^2}{(R_0^2 - R_1^2)}$$

Entonces, usando ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl} \;\Rightarrow\; 2\pi r B_1(r) = -\frac{\mu_0 I R_0^2}{(R_0^2 - R_1^2)} \;\Rightarrow\; \vec{B}_1(r) = -\frac{\mu_0 I R_0^2}{2\pi(R_0^2 - R_1^2) r}\hat{\theta} \;\;;\;\; r > R_0 \tag{2}$$

De forma análoga para el cilindro imaginario con densidad de corriente $\vec{J}_2$ se tendrá que:

$$\vec{B}_2(r_*) = \frac{\mu_0 I r_*}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{\theta}_* \;\;;\;\; r_* \leq R_1 \tag{3}$$

Para los puntos fuera del cilindro la corriente enlazada es:

$$I_{enl} = \int \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} \;\Rightarrow\; I_{enl} = \frac{I}{\pi(R_0^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} r dr d\theta \;\Rightarrow\; I_{enl} = \frac{I R_1^2}{(R_0^2 - R_1^2)}$$

Entonces con ley de Ampère se tendrá que:

$$\vec{B}_2(r_*) = \frac{\mu_0 I R_1^2}{2\pi(R_0^2 - R_1^2) r_*}\hat{\theta}_* \;\;;\;\; r_* > R_1 \tag{4}$$

Donde r_* es la distancia medida desde el centro del agujero, y $\hat{\theta}_*$ es el vector unitario de la base cilíndrica usada para el cilindro imaginario. De acá en adelante nos ponemos en casos para calcular el campo magnético en todo el espacio:

I) Dentro del agujero: Para obtener el campo magnético $\vec{B}_a$ dentro del agujero se deben sumar las expresiones (1) y (3), entonces:

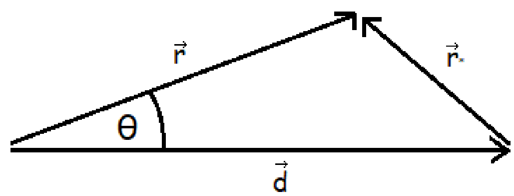
$$\vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I r}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{\theta} + \frac{\mu_0 I r_*}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{\theta}_* \;\Rightarrow\; \vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}(r\hat{\theta} - r_*\hat{\theta}_*)$$

Para tener una respuesta completa, nuestro campo debe quedar expresado en coordenadas y vectores unitarios de una misma base, por lo tanto debemos buscar una forma de simplificar el paréntesis. Podemos darnos cuenta de que aunque ambas bases de vectores unitarios son distintas, podemos escoger con total libertad que $\hat{z} = \hat{z}_*$, ya que estos vectores unitarios son constantes. Entonces, como $\hat{\theta} = \hat{z} \times \hat{r}$ y $\hat{\theta}_* = \hat{z}_* \times \hat{r}_*$, se tiene que:

$$\Rightarrow\; \vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[r(\hat{z} \times \hat{r}) - r_*(\hat{z}_* \times \hat{r}_*)\right] \;\Rightarrow\; \vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[(\hat{z} \times \vec{r}) - (\hat{z} \times \vec{r}_*)\right]$$

$$\Rightarrow\; \vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[\hat{z} \times (\vec{r} - \vec{r}_*)\right]$$

Donde se usó que $\vec{r} = r\hat{r}$, $\vec{r}_* = r_*\hat{r}_*$, y se factorizó por $\hat{z}$ en el producto cruz. Por último, viendo el siguiente diagrama podemos entender que $\vec{r} - \vec{r}_* = \vec{d}$, que corresponde al vector de largo d que une al centro del cilindro con el centro del agujero:



Y entonces, es posible escribir el campo $\vec{B}_a$ al interior del agujero como:

$$\vec{B}_a = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)} \left(\hat{z} \times \vec{d}\right)$$

Es interesante notar que este campo magnético es uniforme, y en particular será cero en el caso que el agujero esté en el centro ($d = 0$).

II) Zona maciza: Para obtener el campo magnético $\vec{B}_m$ dentro de la zona maciza del sistema se debe sumar la expresión (1) para el campo dentro del cilindro macizo junto con la expresión (4) para el campo magnético fuera del cilindro imaginario, entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{B}_m = -\frac{\mu_0 I R_0^2}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)r}\hat{\theta} + \frac{\mu_0 I R_1^2}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)r_*}\hat{\theta}_* = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[r\hat{\theta} - \frac{R_1^2}{r_*}\hat{\theta}_*\right]$$

Usando nuevamente que $\hat{\theta} = \hat{z} \times \hat{r}$ y $\hat{\theta}_* = \hat{z}_* \times \hat{r}_*$, y además por teorema del coseno y con apoyo de la imagen anterior:

$$r_*^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{B}_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z} \times \left[\vec{r} - \frac{R_1^2}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\vec{r}_*\right]$$

Usando que $\vec{r}_* = \vec{r} - \vec{d}$ y reordenando:

$$\Rightarrow \ \vec{B}_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z} \times \left[\left(r - \frac{R_1^2 r}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right)\hat{r} + \frac{R_1^2\vec{d}}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right]$$

Reingresando el producto cruz y recordando que $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$, entonces el campo magnético en la zona maciza de nuestra configuración es:

$$\vec{B}_m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[\left(r - \frac{R_1^2 r}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right)\hat{\theta} + \frac{R_1^2(\hat{z} \times \vec{d})}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right]$$

Podemos notar que si $R_1 = 0$ entonces se obtiene el campo magnético en el interior de un cilindro sin agujero, mientras que el caso $d = 0$ nos entrega el campo magnético dentro de un cascarón cilíndrico.

III) Exterior del cilindro ($r > R_0$): Para obtener el campo $\vec{B}_e$ en el exterior de nuestra configuración se deben sumar las expresiones (2) y (4) para el campo magnético fuera de ambos cilindros. Entonces:

$$\vec{B}_e = -\frac{\mu_0 I R_0^2}{2\pi(R_0^2 - R_1^2) r}\hat{\theta} + \frac{\mu_0 I R_1^2}{2\pi(R_0^2 - R_1^2) r_*}\hat{\theta}_* = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[\frac{R_0^2}{r^2} r\hat{\theta} - \frac{R_1^2}{r_*^2} r_*\hat{\theta}_*\right]$$

Usando nuevamente que $\hat{\theta} = \hat{z} \times \hat{r}$ y $\hat{\theta}_* = \hat{z}_* \times \hat{r}_*$, la expresión para r_* obtenida a partir del teorema del coseno, y la relación $\vec{r}_* = \vec{r} - \vec{d}$, se tiene:

$$\Rightarrow \ \vec{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z} \times \left[\frac{R_0^2}{r^2}\vec{r} - \frac{R_1^2}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\vec{r}_*\right]$$

$$\Rightarrow \ \vec{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z} \times \left[\frac{R_0^2}{r^2}\vec{r} - \frac{R_1^2}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}(\vec{r} - \vec{d})\right]$$

$$\Rightarrow \ \vec{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\hat{z} \times \left[\left(\frac{R_0^2}{r} - \frac{R_1^2 r}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right)\hat{r} + \frac{R_1^2 \vec{d}}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right]$$

Entonces, ingresando el producto cruz y recordando que $\hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$, entonces el campo magnético fuera del cilindro es:

$$\Rightarrow \ \vec{B}_e = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[\left(\frac{R_0^2}{r} - \frac{R_1^2 r}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right)\hat{\theta} + \frac{R_1^2(\hat{z} \times \vec{d})}{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\theta)}\right]$$

Notamos que en el caso del agujero en el centro ($d = 0$) se recupera la simetría cilíndrica, y por lo tanto se obtiene el campo magnético que se obtiene para la zona fuera de un cilindro con ley de Ampère.

En resumen, el campo magnético es:

$$\boxed{\vec{B}(r,\theta) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left(\hat{z} \times \vec{d}\right) & ; \quad \text{Dentro del agujero.} \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[\left(r - \frac{R_1^2 r}{r^2+d^2-2rd\cos(\theta)}\right)\hat{\theta} + \frac{R_1^2(\hat{z}\times\vec{d})}{r^2+d^2-2rd\cos(\theta)}\right] & ; \quad \text{Zona maciza.} \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi(R_0^2 - R_1^2)}\left[\left(\frac{R_0^2}{r} - \frac{R_1^2 r}{r^2+d^2-2rd\cos(\theta)}\right)\hat{\theta} + \frac{R_1^2(\hat{z}\times\vec{d})}{r^2+d^2-2rd\cos(\theta)}\right] & ; \quad \text{Fuera del cilindro.} \end{cases}}$$