FI2002-2 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Desarrollo P3 Tarea.

30 de Junio de 2020

P3. Potencial eléctrico:

Usando como origen la esquina inferior izquierda de la placa, tenemos que encontrar el potencial $V(x,z)$ para $x \in (0,l)$ y $z \in (0,h)$, donde las condiciones de borde son:

$$V(x=0,z)=0 \quad ; \quad V(x=l,z)=0$$
$$V(x,z=0)=0 \quad ; \quad V(x,z=h)=a\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

Debemos resolver la ecuación de Laplace en coordenadas rectangulares en dos dimensiones, es decir:

$$\nabla^2 V = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Usando separación de variables se busca una solución de la forma $V(x,z)=X(x)Z(z)$, y entonces:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \;\Rightarrow\; Z\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Z}{dz^2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda \tag{1}$$

Partimos por la EDO relacionada a $X(x)$, puesto que en la variable x las condiciones de borde son constantes. Vemos que:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\lambda \;\Rightarrow\; X''-\lambda X=0 \tag{2}$$

Tomamos casos para el signo de λ:

I) $\underline{\lambda > 0}$: En este caso se tienen soluciones exponenciales, es decir:

$$X(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}x}+Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Usando las condiciones $X(x=0)=0$ y $X(x=l)=0$:

$$X(x=0)=0 \;\Rightarrow\; A+B=0 \;\Rightarrow\; B=-A \quad ; \quad X(x=l)=0 \;\Rightarrow\; A\left(e^{\sqrt{\lambda}l}-e^{-\sqrt{\lambda}l}\right)=0$$

El término entre paréntesis sólo puede ser cero si $l=0$ ó $\lambda=0$, pero como no estamos en esos casos entonces ese término siempre es distinto de cero, con lo cual $A=0$, $B=0$, y entonces $X(x)=0$. Como buscamos soluciones no triviales (distintas de cero), el caso $\lambda>0$ queda descartado.

II) $\underline{\lambda = 0}$:
Al reemplazar en la EDO (2) se obtienen soluciones tipo rectas:

$$X''=0 \;\Rightarrow\; X(x)=Ax+B$$

Usando las condiciones $X(x=0)=0$ y $X(x=l)=0$:

$$X(x=0)=0 \;\Rightarrow\; B=0 \quad ; \quad X(x=l)=0 \;\Rightarrow\; Al=0$$

Como estamos en el caso $l \neq 0$, entonces $A=0$, $B=0$, y obtenemos una solución $X(x)=0$. Nuevamente, como buscamos soluciones no triviales entonces el caso $\lambda=0$ queda descartado.

III) $\underline{\lambda<0}$:
Para no confundirse con el signo usamos $\lambda=-|\lambda|$. Al reemplazar en la EDO (2) se obtienen soluciones oscilatorias:

$$X''+|\lambda|X=0 \;\Rightarrow\; X(x)=A\cos\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)+B\sin\left(\sqrt{|\lambda|}x\right)$$

Usando las condiciones $X(x=0)=0$ y $X(x=l)=0$:

$$X(x=0)=0 \;\Rightarrow\; A\cos(0)+B\sin(0)=0 \;\Rightarrow\; A=0$$
$$X(x=l)=0 \;\Rightarrow\; B\sin\left(\sqrt{|\lambda|}l\right)=0$$

Como queremos soluciones no triviales entonces queremos que $B\neq 0$, con lo cual el seno debe ser cero, que es equivalente a decir que el argumento es un múltiplo entero de π:

$$\sin\left(\sqrt{|\lambda|}l\right)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{|\lambda|}l=n\pi \;\Rightarrow\; \lambda_n=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Con lo cual encontramos condiciones sobre el valor de λ; debe ser un número negativo, y además tiene infinitos valores que dependen de $n\in\mathbb{N}_+$, y la solución para $X(x)$ tiene la forma:

$$X_n(x)=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{3}$$

Ahora que se tiene información sobre λ, resolvemos la ecuación para $Z(z)$ que encontramos a partir de la expresión (1):

$$-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\lambda \;\Rightarrow\; Z''+\lambda Z=0 \;\Rightarrow\; Z''-\frac{n^2\pi^2}{l^2}Z=0$$

Con lo cual se obtienen soluciones exponenciales:

$$Z_n(z)=C\exp\left(\frac{n\pi}{l}z\right)+D\exp\left(-\frac{n\pi}{l}z\right)$$

Con la condición $Z(z=0)=0$ podemos obtener que $D=-C$, y entonces:

$$Z_n(z)=C_n\left[\exp\left(\frac{n\pi}{l}z\right)-\exp\left(-\frac{n\pi}{l}z\right)\right]$$

Usando $D_n=2C_n$ podemos escribir la expresión anterior de una forma un poco más compacta:

$$\Rightarrow\; Z_n(z)=D_n\sinh\left(\frac{n\pi}{l}z\right) \tag{4}$$

Y entonces, la solución $V(x,z)$ para n arbitrario resulta de la multiplicación de las expresiones (3) y (4):

$$V_n(x,z) = B_n D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \Rightarrow V_n(x,z) = F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Donde se usa $F_n = B_n D_n$ para reducir constantes. La solución general corresponde a una superposición de las soluciones para $n \in \mathbb{N}_+$, es decir:

$$\Rightarrow V(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{5}$$

Sin embargo, falta aplicar la condición de borde asociada a $z = l$:

$$V(x, z = h) = a\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

En este paso se tendría que buscar la serie de Fourier de la función de la derecha, sin embargo, al ser esta función un seno puro, sabemos que entonces sólo sobrevive un término de la serie, el cual está asociado a $n = 1$, es decir:

$$F_n \sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right) = \begin{cases} a & ; \quad n = 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases} \Rightarrow F_n = \begin{cases} \frac{a}{\sinh\left(\frac{n\pi}{l}h\right)} & ; \quad n = 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, en la solución general (5) sólo sobrevive el término asociado a F_1, con lo cual se concluye que:

$$V(x,z) = F_1 \sinh\left(\frac{\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \Rightarrow \boxed{V(x,z) = \frac{a}{\sinh\left(\frac{\pi}{l}h\right)}\sinh\left(\frac{\pi}{l}z\right)\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)}$$