**FI2002-2** Electromagnetismo.
**Profesor:** Marcel Clerc.
**Auxiliares:** Guido Escudero, Roberto Gajardo.

# Pauta Auxiliar 13,5: Preparación control.

08 de Julio de 2020

**P1. Cascarón esférico giratorio:**

Físicamente se debe identificar que, al estar el cascarón cargado y este a la vez girando, entonces existen cargas en movimiento, es decir, una corriente. Entonces, en vez de tomar en cuenta la existencia de un cascarón, podemos modelar esta configuración como si fuese una corriente sobre una superficie esférica quieta. Sin embargo, hasta ahora en el curso hemos usado la ley de Boit-Savart para encontrar campos magnéticos generados por corrientes en circuitos lineales (cables), por lo tanto este ejercicio servirá como un ejemplo para saber abordar problemas con corrientes en superficies y volúmenes. La ley de Biot-Savart para corrientes superficiales/volumétricas es, respectivamente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV$$

Donde $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ tienen la misma interpretación que en caso de configuraciones lineales, $\vec{K}(\vec{r}') = \sigma\vec{v}(\vec{r}')$ y $\vec{J}(\vec{r}') = \rho\vec{v}(\vec{r}')$, con $\vec{v}(\vec{r}')$ la velocidad del diferencial de carga en la superficie o volumen, y en el caso de configuraciones que rotan se usa $\vec{v}(\vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{r}'$. Como nuestro caso es el de una superficie usamos la primera integral, para lo cual necesitamos calcular $\vec{K}$.

En general, para el caso de configuraciones esféricas que giran en torno a un eje es conveniente usar la velocidad angular en el eje $\hat{z}$, es decir, $\vec{\omega} = \omega_0\hat{z}$, de esta forma las integrales asociadas a coordenadas esféricas, como se verá más adelante, se simplifican. Por otro lado, sabemos que $\vec{r}'$ es el vector que une al punto donde queremos calcular el campo magnético con la distribución de corriente. En este caso notamos que $\vec{r}' = R\hat{r}$, puesto que cualquier punto de la distribución de corriente está a una distancia $R$ del centro en la dirección radial, y entonces:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}' = \omega_0\hat{z} \times R\hat{r} = \omega_0 R\,(\hat{z} \times \hat{r})$$

Escribimos $\hat{r}$ en la base cartesiana para poder realizar el producto cruz:

$$\Rightarrow\ \vec{v} = \omega_0 R\,[\hat{z} \times (\sin(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\theta)\sin(\phi)\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z})]$$
$$\Rightarrow\ \vec{v} = \omega_0 R\sin(\theta)\,[\cos(\phi)\hat{y} - \sin(\phi)\hat{x}]\ \Rightarrow\ \vec{v} = \omega_0 R\sin(\theta)\hat{\phi}$$

Donde se usó la definición del vector unitario $\hat{\phi}$ en base cartesiana. Con esto se tiene entonces:

$$\vec{K}(\theta) = \sigma\omega_0 R\sin(\theta)\hat{\phi}$$

Por otro lado, como se quiere el campo magnético en el origen entonces $\vec{r} = \vec{0}$, y así:

$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{0} - R\hat{r}\ \Rightarrow\ \vec{r} - \vec{r}' = -R\hat{r}\ \Rightarrow\ |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = R^3$$

Finalmente, como estamos en una esfera de radio constante, el diferencial de superficie es $dS = R^2 \sin(\theta) d\phi d\theta$, y por lo tanto reemplazando en la integral:

$$\Rightarrow \ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma\omega_0 R \sin(\theta)\hat{\phi} \times (-R\hat{r})}{R^3} R^2 \sin(\theta) d\phi d\theta$$

$$\Rightarrow \ \vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma\omega_0 R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \left(\hat{\phi} \times \hat{r}\right) d\phi d\theta \ \Rightarrow \ \vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma\omega_0 R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\hat{\theta} d\phi d\theta$$

Como el vector unitario $\hat{\theta}$ depende de las coordenadas esféricas $\theta$ y $\phi$, no puede salir de la integral directamente, sino que debemos escribirlo en la base cartesiana para hacer explícita la dependencia en los ángulos y así poder integrar, y entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{B} = -\frac{\mu_0 \sigma\omega_0 R}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \left[\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{x} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{y} - \sin(\theta)\hat{z}\right] d\phi d\theta$$

Como la integral asociada a $\phi$ es en un ciclo completo (de 0 a $2\pi$) entonces las integrales de $\sin(\phi)$ y $\cos(\phi)$ se anulan, con lo cual los términos asociados a $\hat{x}$ y $\hat{y}$ desaparecen, y entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma\omega_0 R}{4\pi} \hat{z} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3(\theta) d\phi d\theta$$

La integral en $\phi$ nos dará un factor $2\pi$, mientras que la integral en $\theta$ puede abordarse usando la relación trigonométrica $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$:

$$\int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2(\theta)\right) \sin(\theta) d\theta$$

Usando el siguiente cambio de variable:

$$u = \cos(\theta) \ \Rightarrow \ du = -\sin(\theta) d\theta \ \Rightarrow \ d\theta = -\frac{du}{\sin(\theta)}$$

$$\theta = 0 \ \Rightarrow \ u = 1 \quad ; \quad \theta = \pi \ \Rightarrow \ u = -1$$

$$\Rightarrow \ \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2(\theta)\right) \sin(\theta) d\theta = -\int_1^{-1} (1 - u^2) \sin(\theta) \frac{du}{\sin(\theta)} = \int_{-1}^{1} (1 - u^2) du = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \ \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3}$$

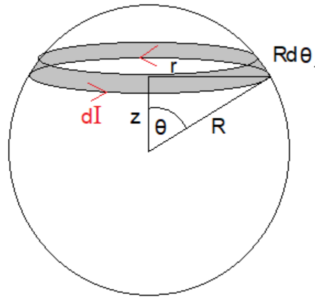
Y entonces, se tiene el campo magnético:

$$\Rightarrow \ \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma\omega_0 R}{4\pi} 2\pi \frac{4}{3} \hat{z} \ \Rightarrow \ \boxed{\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma\omega_0 R \hat{z}}$$

Ahora, existe otra forma de abordar el problema que no requiere el uso de la ley de Biot-Savart, pero si requiere calcular integrales y conocer el resultado del campo magnético en el eje de un anillo de radio $r$. De la P1 de la clase auxiliar 12 se conoce dicho campo magnético a una altura $z$ de un anillo de radio $a$, entonces usando $a = r$, se tiene:

$$\vec{B}_r = \frac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Donde $I$ es la corriente que circula por el anillo. Ahora, podemos tomar en cuenta que nuestro cascarón esférico no es más que la suma de muchos anillos de espesor infinitesimal $dz$ y radio $r$ por donde circula una corriente $dI$, tal como se muestra en la siguiente figura:




Entonces el campo magnético de cada uno de estos anillos es:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 r^2}{2(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dI\hat{z}$$

Por teorema de Pitágoras notamos que $z^2 + r^2 = R^2$, mientras que $r = R\sin(\theta)$, entonces:

$$\Rightarrow\ d\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2 \sin^2(\theta)}{2(R^2)^{\frac{3}{2}}} dI\hat{z}\ \Rightarrow\ d\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin^2(\theta)}{2R} dI\hat{z}$$

La corriente $dI$ está generada por la rotación de diferenciales de carga $dq$, donde:

$$dI = dq\frac{\omega_0}{2\pi}$$

Donde el factor $2\pi$ en el denominador aparece para usar la frecuencia sin unidades (es decir, sin radianes). Por otro lado, el diferencial de carga $dq$ corresponde a la densidad superficial $\sigma$ por el área de este anillo infinitesimal. En este caso el área corresponde al perímetro de la circunferencia $2\pi r = 2\pi R\sin(\theta)$ multiplicado por el ancho del anillo, en este caso $Rd\theta$, entonces:

$$dq = \sigma dA = \sigma \cdot 2\pi R\sin(\theta)Rd\theta\ \Rightarrow\ dq = 2\pi\sigma R^2\sin(\theta)d\theta\ \Rightarrow\ dI = \sigma\omega_0 R^2\sin(\theta)d\theta$$

Y entonces, reemplazando en el diferencial de campo magnético:

$$\Rightarrow\ d\vec{B} = \frac{\mu_0\sin^2(\theta)}{2R}\sigma\omega_0 R^2\sin(\theta)d\theta\hat{z}\ \Rightarrow\ d\vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega_0 R\sin^3(\theta)d\theta\hat{z}$$

El campo total se obtiene al sumar todos los anillos infinitesimales, que es equivalente a integrar en el ángulo $\theta$ entre $0$ y $\pi$, entonces:

$$\vec{B} = \int d\vec{B}\ \Rightarrow\ \vec{B} = \frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega_0 R\hat{z}\int_0^\pi \sin^3(\theta)d\theta$$

Esta es la misma integral que calculamos anteriormente, la cual da $\frac{4}{3}$, y entonces se concluye que:

$$\Rightarrow\ \boxed{\vec{B} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega_0 R\hat{z}}$$

**P2. Barra con densidad de corriente no uniforme:**

a) Por definición la intensidad de corriente está dada por:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Donde $d\vec{S}$ es el diferencial de la superficie perpendicular a la densidad de corriente $\vec{J}$. Si se usan coordenadas cilíndricas $\{r, \phi, u\}$ entonces la superficie perpendicular es un disco (sección transversal del cilindro), con lo cual $d\vec{S} = rdrd\phi\hat{u}$, con $r \in [0, R]$ y $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \gamma u^2 \hat{u} \cdot rdrd\phi\hat{u}$$

Como no se integra con respecto a $u$, se toma como constante para la integral, y de esta forma:

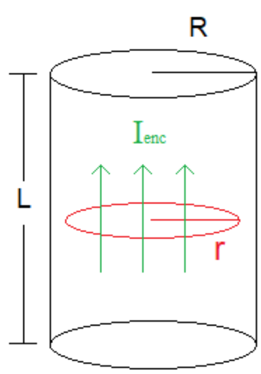
$$\Rightarrow \; I(u) = \gamma u^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R rdrd\phi \;\Rightarrow\; \boxed{I(u) = \gamma\pi R^2 u^2}$$

Ahora usamos este resultado para calcular el campo magnético aplicando la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Donde $I_{enc}$ es la corriente que fluye a través del área encerrada por la curva $C$. Dada la simetría del problema notamos que la intensidad de corriente no depende del ángulo azimutal, con lo cual el campo magnético no dependerá del ángulo $\phi$. Por otro lado, la dirección y sentido de la corriente nos dicen (por regla de la mano derecha) que el campo magnético va en la dirección angular, y entonces con todo esto es posible decir que $\vec{B} = B(r, u)\hat{\phi}$. Ahora nos ponemos en casos:

I) $\underline{r \leq R}$: En este caso se tiene que $C$ es un anillo de radio $r \leq R$, como se muestra en la siguiente figura:




Esto tiene como consecuencia que $d\vec{l} = rd\phi\hat{\phi}$ (diferencial de línea de un anillo de radio r) con $\phi \in [0, 2\pi)$. Ahora, como la densidad de corriente no depende del radio $r$, entonces en un disco del cilindro ésta se mantiene uniforme. Entonces si $A_R$ es el área transversal del cilindro, y $A_r$ es el área encerrada por la circunferencia de radio $r$, esto nos permite escribir, para $u$ fijo:

$$\frac{I(u)}{A_R} = \frac{I_{enc}}{A_r} \;\Rightarrow\; I_{enc} = \frac{I(u)A_r}{A_R} = \frac{(\gamma\pi R^2 u^2)(\pi r^2)}{\pi R^2} \;\Rightarrow\; I_{enc} = \gamma\pi u^2 r^2$$

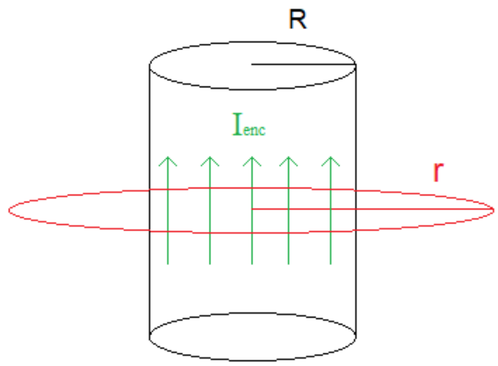
Entonces, reemplazando todo en la ley de Ampère, se tiene que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \;\Rightarrow\; \int_0^{2\pi} B(r,u)\hat{\phi} \cdot r d\phi\hat{\phi} = \mu_0 \gamma \pi u^2 r^2$$

$$\Rightarrow\; B(r,u) r \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 \gamma \pi u^2 r^2 \;\Rightarrow\; 2\pi r B(r,u) = \mu_0 \gamma \pi u^2 r^2$$

$$\Rightarrow\; B(r,u) = \frac{\mu_0 \gamma \pi u^2 r}{2\pi} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B}(r,u) = \frac{\mu_0 \gamma u^2 r}{2}\hat{\phi} \;\;;\;\; r \leq R}$$

II) $\underline{r > R}$: Este caso es idéntico pero con un anillo de radio $r > R$, como se muestra en la siguiente figura:




El diferencial de línea y el comportamiento del campo magnético dada la simetría del problema siguen siendo lo mismo que en el caso $r < R$, lo único que cambia es la corriente enlazada, la cual ahora corresponde a toda la intensidad de corriente que atraviesa al cilindro, es decir, $I_{enc} = I(u)$. Reemplazando todo en la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \;\Rightarrow\; \int_0^{2\pi} B(r,u)\hat{\phi} \cdot r d\phi\hat{\phi} = \mu_0 \gamma \pi R^2 u^2$$

$$\Rightarrow\; B(r,u) r \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 \gamma \pi R^2 u^2 \;\Rightarrow\; 2\pi r B(r,u) = \mu_0 \gamma \pi R^2 u^2$$

$$\Rightarrow\; B(r,u) = \frac{\mu_0 \gamma \pi R^2 u^2}{2\pi r} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B}(r,u) = \frac{\mu_0 \gamma R^2 u^2}{2r}\hat{\phi} \;\;;\;\; r > R}$$

b) Para esta configuración debemos recordar la fuerza de Lorentz, la cual nos dice que un circuito por el cual fluye una corriente $I$, en presencia de un campo magnético $\vec{B}$, siente una fuerza dada por:

$$\vec{F_b} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Donde $d\vec{l}$ es el diferencial de línea que recorre al circuito (en este caso, al cilindro). Es importante entender que el campo magnético que aparece en la expresión anterior **es el campo externo**, jamás debe reemplazarse por el campo generado por la configuración que siente la fuerza (en ese sentido nos olvidaremos de lo calculado en la parte (a), excepto por la intensidad de corriente $I(u)$).

Entonces, para este caso reemplazando $I = I(u)$, $\vec{B} = B_0\hat{y}$ y $d\vec{l} = du\hat{u}$, con $u \in [0, L]$, se tiene que la fuerza de Lorentz ejercida sobre el cilindro es:

$$\vec{F}_b = \int_0^L I(u)du\hat{u} \times B_0\hat{y} \;\Rightarrow\; \vec{F}_b = \gamma\pi R^2 B_0 \int_0^L u^2 du(\hat{u} \times \hat{y})$$

En este caso para realizar el producto cruz escribiremos $\hat{u}$ usando la base cartesiana. Por trigonometría (ver configuración (b)) se tiene que:

$$\hat{u} = \cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{z} \;\Rightarrow\; \hat{u} \times \hat{y} = \cos(\alpha)(\hat{x} \times \hat{y}) + \sin(\alpha)(\hat{z} \times \hat{y})$$
$$\Rightarrow\; \hat{u} \times \hat{y} = \cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x}$$

Entonces, como $\hat{u} \times \hat{y}$ no depende de $u$ ($\alpha$ es constante), todo el producto cruz sale de la integral, y así:

$$\Rightarrow\; \vec{F}_b = \gamma\pi R^2 B_0 \left(\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x}\right) \int_0^L u^2 du \;\Rightarrow\; \vec{F}_b = \frac{1}{3}\gamma\pi R^2 B_0 L^3 \left(\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x}\right)$$

Notamos entonces que la fuerza que siente el cilindro en presencia de este campo magnético (en el caso de equilibrio estático) tiene una componente vertical y otra componente horizontal. Las otras fuerzas que actúan en el sistema son el peso del cilindro y las tensiones de los cables ($T_1$ y $T_2$ para el cable superior e inferior, respectivamente), y entonces, estando en equilibrio estático, la suma de todas estas fuerzas debe ser cero, así:

$$\vec{W} + \vec{F}_b + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \;\Rightarrow\; -Mg\hat{z} + \frac{1}{3}\gamma\pi R^2 B_0 L^3 \left(\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x}\right) + T_1\hat{x} + T_2\hat{x} = 0$$

Y entonces, separando componentes, obtenemos dos ecuaciones para nuestro sistema:

$$\boxed{\frac{1}{3}\gamma\pi R^2 B_0 L^3 \cos(\alpha) - Mg = 0 \quad ; \quad T_1 + T_2 - \frac{1}{3}\gamma\pi R^2 B_0 L^3 \sin(\alpha)} \tag{1}$$

Para obtener la otra ecuación debemos imponer que el torque total sobre el cilindro sea cero. Tomando como origen el extremo inferior de la barra tendremos los siguientes radios para las tensiones y el peso:

$$\vec{r}_{T1} = L\hat{u} \quad ; \quad \vec{r}_{T2} = \vec{0} \quad ; \quad \vec{r}_W = \frac{L}{2}\hat{u}$$

Con este origen vemos que la tensión $T_2$ no produce torque, mientras que el torque producido por la tensión $T_1$ y el peso serán:

$$\vec{N}_{T1} = \vec{r}_{T1} \times \vec{T}_1 = LT_1(\hat{u} \times \hat{x}) \;\Rightarrow\; \vec{N}_{T_1} = LT_1 \sin(\alpha)\hat{y}$$
$$\vec{N}_W = \vec{r}_W \times \vec{W} = \frac{LMg}{2}(\hat{u} \times \hat{x}) \;\Rightarrow\; \vec{N}_W = \frac{LMg}{2}\hat{y}$$

Ahora debemos encontrar el torque producido por la fuerza de Lorentz, aunque nos encontramos con un problema, ¿dónde se está ejerciendo esta fuerza? En este caso es necesario encontrar el torque producido por un pequeño segmento de circuito (cilindro) en una posición $\vec{r}$, y luego integrar a lo largo del circuito para obtener el torque total.

En ese sentido, buscamos[1]:

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F}_b$$

Donde por definición de fuerza de Lorentz se tiene $d\vec{F}_b = Id\vec{l} \times \vec{B}$, con $I$, $d\vec{l}$ y $\vec{B}$ los mismos usados en el cálculo de la fuerza, mientras que $\vec{r}$ es la posición del segmento diferencial de circuito, es decir, $\vec{r} = u\hat{u}$. Entonces:

$$d\vec{F}_b = \gamma\pi R^2 B_0 u^2 du(\hat{u} \times \hat{y}) = \gamma\pi R^2 B_0 u^2 du\,(\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x})$$
$$\Rightarrow\ \vec{r} \times d\vec{F}_b = \gamma\pi R^2 B_0 u^3 du\,[\hat{u} \times (\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x})]$$

Usando $\hat{u}$ en base cartesiana:

$$\hat{u} \times (\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x}) = (\cos(\alpha)\hat{x} + \sin(\alpha)\hat{z}) \times (\cos(\alpha)\hat{z} - \sin(\alpha)\hat{x}) = -\hat{y}$$

Reemplazando:

$$\Rightarrow\ \vec{r} \times d\vec{F}_b = -\gamma\pi R^2 B_0 u^3 du\hat{y}$$

Y entonces, integrando a lo largo del cilindro para sumar la contribución de todos los pequeños tramos, se tiene que:

$$\vec{N}_b = \int d\vec{N} = -\gamma\pi R^2 B_0 \hat{y} \int_0^L u^3 du\ \Rightarrow\ \vec{N}_b = -\frac{1}{4}\gamma\pi R^2 B_0 L^4 \hat{y}$$

Entonces, sumando todos los torques e imponiendo que dicha suma sea cero por equilibrio estático, se tiene:

$$\vec{N}_{T1} + \vec{N}_W + \vec{N}_b = \vec{0}\ \Rightarrow\ LT_1 \sin(\alpha)\hat{y} + \frac{LMg}{2}\hat{y} - \frac{1}{4}\gamma\pi R^2 B_0 L^4 \hat{y} = \vec{0}$$

Con lo cual obtenemos la tercera ecuación para nuestro sistema:

$$\Rightarrow\ \boxed{LT_1 \sin(\alpha) + \frac{LMg}{2} - \frac{1}{4}\gamma\pi R^2 B_0 L^4 = 0} \tag{2}$$

Entonces, con las ecuaciones (1) y (2) tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, y es posible entonces despejarlas.

[1] En realidad la fórmula que debería aplicarse en cada segmento infinitesimal de circuito es $d\vec{N} = d\vec{r} \times \vec{F} + \vec{r} \times d\vec{F}$, donde $\vec{r}$ es el brazo con el cual se calcula el torque en el segmento infinitesimal. Sin embargo, como en este caso estamos en régimen estático, $\vec{r}$ es fijo para cada segmento infinitesimal del circuito, y por lo tanto $d\vec{r} = 0$.