FI2002-2 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Pauta Auxiliar 12: Fuerza magnética y ley de Ampère.

23 de Junio de 2020

P1. Fuerza entre espiras circulares:

a) Usaremos la ley de Biot-Savart para una corriente circulando en un cable:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Donde $\vec{r}$ es el punto donde queremos calcular el campo, $\vec{r}'$ es el vector que parametriza la distribución de corriente, y $d\vec{l}$ es el diferencial asociado a la distribución de corriente. Usando coordenadas cilíndricas, tendremos que $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = a\hat{r}$ y $d\vec{l} = ad\theta\hat{\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$. Con esto tendremos que $\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - a\hat{r}$, y así:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2} \;\Rightarrow\; |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left(z^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = ad\theta\hat{\theta} \times (z\hat{z} - a\hat{r}) = ad\theta(z\hat{r} + a\hat{z})$$

Entonces, reemplazando en la integral:

$$\Rightarrow\; \vec{B} = \frac{\mu_0 I_a}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{az\hat{r}}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{a^2\hat{z}}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta\right]$$

$$\Rightarrow\; \vec{B} = \frac{\mu_0 I_a}{4\pi}\left[\frac{az}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} \hat{r}d\theta + \frac{a^2\hat{z}}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\theta\right]$$

Donde sacamos las cantidades cada integral que no dependen de θ. Como vimos en algunos ejercicios al principio del curso, la integral entre 0 y 2π de $\hat{r}$ es cero, en virtud de la definición $\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$ y del hecho de que la integral de las funciones trigonométricas en un período completo es cero. Entonces sólo se mantiene la segunda integral, con lo cual:

$$\Rightarrow\; \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I_a}{4\pi}\frac{a^2\hat{z}}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I_a a^2}{2\,(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}}$$

b) Si $b << a$ entonces podemos decir que el campo magnético $\vec{B}_0$ que siente la espira de radio b es el campo magnético encontrado en la parte a) para $z = d$, es decir:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I_a a^2}{2\,(d^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

Entonces, usando la fuerza de Lorenz:

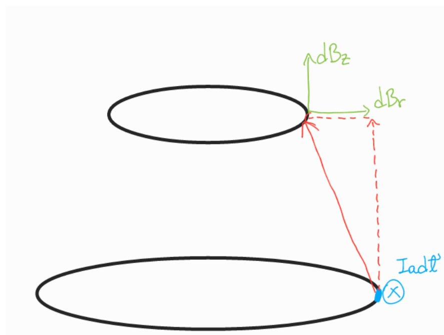
$$\vec{F} = \int I d\vec{l} \times \vec{B}_0$$

Para esta espira tendremos que $I = I_b$ y $d\vec{l} = bd\theta\hat{\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces:

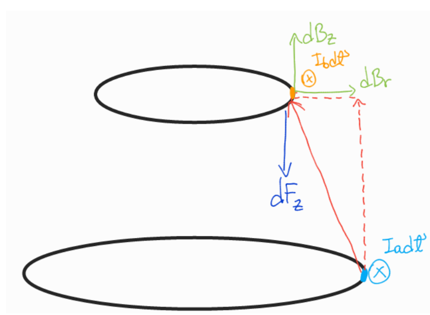
$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} I_b b d\theta \frac{\mu_0 I_a a^2}{2\left(d^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}(\hat{\theta} \times \hat{z}) = \frac{\mu_0 I_a I_b a^2 b}{2\left(d^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \hat{r} d\theta \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{0}}$$

Donde el resultado es en virtud de que la integral de $\hat{r}$ entre 0 y 2π es cero.

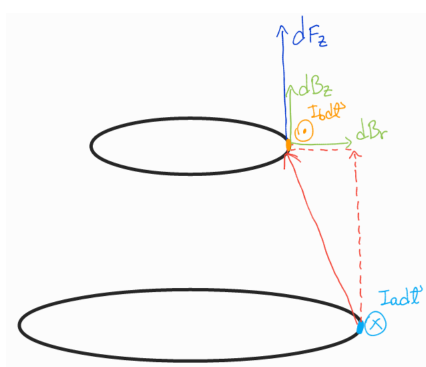
c) Para el caso general notemos que para una pequeña distribución de corriente $I_a d\vec{l}$ se genera un campo en la espira superior con una componente en $\hat{z}$ y una componente $\hat{r}$, tal como se muestra en la siguiente figura:



La componente $\hat{z}$ de este campo no genera una fuerza en la espira (como vimos en la parte b)), sin embargo usando la regla de la mano derecha junto con la corriente $I_b d\vec{l}$ podemos notar que la componente radial de este campo genera una fuerza en la dirección $\hat{z}$:



En la situación anterior notamos que usamos I_a e I_b en el mismo sentido, con lo cual la fuerza es atractiva. En la situación en que I_a e I_b tienen sentido contrario, entonces la fuerza es repulsiva, lo cual se puede comprobar con la regla de la mano derecha y se muestra en la siguiente imagen:



P2. Ley de Ampère:

a) La ley de Ampère en su forma integral nos permite encontrar corrientes a partir de campos magnéticos, o campos magnéticos a partir de corrientes cuando existen ciertas simetrías. Sin embargo, si queremos encontrar la densidad de corriente entonces la forma integral de esta ley no nos ayuda mucho, sino que debemos usar la ley de Ampère en su forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Para lo cual debemos calcular el rotor del campo magnético (y así podremos despejar $\vec{J}$ desde la derecha). Usando su expresión en coordenadas cilíndricas y recordando que $\vec{B}$ sólo tiene componente en $\hat{\theta}$ (es decir, $B_r = B_z = 0$), se tiene que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\theta & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rB_\theta & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial z}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta)\,\hat{z}$$

Como B_θ sólo depende de r, entonces $\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = 0$, con lo cual la componente asociada a $\hat{r}$ es cero, y así:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{r}\left[B_\theta + r\frac{\partial B_\theta}{\partial r}\right]\hat{z}$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial r} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r - \frac{r^3}{2a^2}\right) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(1 - \frac{3r^2}{2a^2}\right) \Rightarrow r\frac{\partial B_\theta}{\partial r} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r - \frac{3r^3}{2a^2}\right)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2r}\left[r - \frac{r^3}{2a^2} + r - \frac{3r^3}{2a^2}\right]\hat{z} = \frac{\mu_0 J_0}{2r}\left[2r - \frac{2r^3}{a^2}\right]\hat{z} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 J_0\left[1 - \frac{r^2}{a^2}\right]\hat{z}$$

Entonces, dividiendo por μ_0 encontraremos $\vec{J}$, y así:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}(r) = J_0\left[1 - \frac{r^2}{a^2}\right]\hat{z}}$$

Ahora, para la intensidad de corriente usamos la definición que involucra la densidad de corriente:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Donde $d\vec{S}$ es el diferencial de la superficie perpendicular a la corriente. En este caso esta superficie es un disco de radio a (sección transversal del cilindro), entonces $d\vec{S} = rdrd\theta\hat{z}$, con r entre 0 y a, y θ entre 0 y 2π. Entonces:

$$I = J_0 \int_0^{2\pi}\int_0^a \left[1 - \frac{r^2}{a^2}\right] rdrd\theta = 2\pi J_0\left[\int_0^a rdr - \frac{1}{a^2}\int_0^a r^3 dr\right] = 2\pi J_0\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi J_0 a^2}{2}}$$

b) Para el campo fuera del cilindro podemos usar la forma integral de la ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Donde I_{enc} es la corriente que fluye por dentro de la curva cerrada C. Por regla de la mano derecha podemos ver que el campo irá en la dirección azimutal, además como se vio en clases, con este tipo de configuración (simetría cilíndrica) la intensidad del campo magnético depende sólo de la distancia radial, entonces $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$. Esto nos dice que como curva cerrada usemos un anillo concéntrico con el cilindro de radio $r > a$ arbitrario, y entonces $d\vec{l} = rd\theta\hat{\theta}$, con θ entre 0 y 2π e I_{enc} es la corriente encontrada en la parte a), y así:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \;\Rightarrow\; \int_0^{2\pi} B(r) r d\theta = \frac{\pi J_0 \mu_0 a^2}{2} \;\Rightarrow\; 2\pi r B(r) = \frac{\pi J_0 \mu_0 a^2}{2}$$

$$\Rightarrow\; B(r) = \frac{J_0 \mu_0 a^2}{4r} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{B}(r) = \frac{J_0 \mu_0 a^2}{4r}\hat{\theta}}$$