FI2002-2 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Pauta Auxiliar 10: Corriente eléctrica.

09 de Junio de 2020

P1. Circuito esférico:

a) Recordemos que se tiene la ecuación de continuidad para medios conductores:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Donde $\rho(\vec{r}, t)$ es la densidad volumétrica de carga, y $\vec{J}(\vec{r}, t)$ es la densidad de corriente. Esta ecuación puede interpretarse como el hecho de que un cambio en la densidad de carga ρ en cierto volumen sólo puede ser posible si hay cargas que salen o entran en dicho volumen, lo cual es básicamente la definición de una corriente (cargas en movimiento, y de ahí viene el término $\nabla \cdot \vec{J}$). La forma en que se saca ventaja de esta expresión es en el hecho de que, para el caso estacionario, la densidad volumétrica de carga es constante en el tiempo, es decir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow \ \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Ahora, por la simetría del problema podemos entender que las cargas se mueven de un cascarón a otro de forma radial, y entonces se tiene que $\vec{J} = J(r)\hat{r}$. Como consecuencia, si usamos coordenadas esféricas sólo sobrevive el término asociado a la derivada radial, ya que $\vec{J}$ sólo tiene componente en $\hat{r}$, entonces:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J\right) = 0 \ \Rightarrow \ r^2 J = C \ \Rightarrow \ \vec{J}(r) = \frac{C}{r^2}\hat{r} \tag{1}$$

Ahora, como el material cumple la ley de Ohm, se tiene entonces que $\vec{J} = g\vec{E}$, con g la conductividad. Nuevamente por simetría se puede argumentar que el campo eléctrico también es puramente radial, es decir, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ (y de esa forma también la ley de Ohm es consistente con el resultado que encontramos de $\vec{J}$), y usando la conductividad como $g = k|\vec{E}| = kE(r)$, entonces:

$$\vec{J} = g\vec{E} \ \Rightarrow \ \vec{J} = kE(r)E(r)\hat{r} \ \Rightarrow \ \vec{J} = kE^2\hat{r}$$

Reemplazando la expresión encontrada para $\vec{J}$ y desarrollando:

$$\vec{J} = kE^2\hat{r} \ \Rightarrow \ \frac{C}{r^2} = kE^2 \ \Rightarrow \ E(r) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{C}{k}} \ \Rightarrow \ \vec{E}(r) = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{C}{k}}\hat{r}$$

Para encontrar la constante indeterminada C, y por lo tanto el campo eléctrico, podemos usar el dato de que la diferencia de potencial entre los cascarones es V, entonces:

$$\Rightarrow \ V = V(a) - V(b) = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sqrt{\frac{C}{k}}\int_a^b \frac{dr}{r} \ \Rightarrow \ V = \ln\left(\frac{b}{a}\right)\sqrt{\frac{C}{k}}$$

$$\Rightarrow \ C = \frac{kV^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)} \ \Rightarrow \ \vec{E}(r) = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r}\hat{r}$$

Ahora, obteniendo $\vec{E}$ podemos obtener $\vec{J}$ (por la ley de Ohm) y g (por la relación entregada en el enunciado), donde:

$$\vec{J}(r) = \frac{kV^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right) r^2}\hat{r} \quad ; \quad g = \frac{kV}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r}$$

Usando cada una de estas cantidades por separado, es posible resolver el problema tomando caminos distintos, y con fines pedagógicos lo haremos de ambas formas. Partiendo con la densidad de corriente, recordamos que por definición la corriente corresponde a la integral de $\vec{J}$ en la superficie perpendicular a este vector, es decir:

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Como en este caso el vector $\vec{J}$ está en el eje radial, la superficie sobre la cual se integra es un cascarón esférico imaginario de radio r, entonces debemos usar $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$, y así:

$$\Rightarrow \; I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{kV^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right) r^2} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \; \Rightarrow \; \boxed{I = \frac{4\pi kV^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

La otra forma de encontrar la corriente (usando la conductividad g) se basa en el hecho de que este es simplemente un circuito con una "forma extraña", en donde ambos cascarones con el material conductor forman una resistencia esférica. Considerando una delgada lámina de grosor dr de este material conductor, por definición la resistencia de esta capa delgada estará dada por:

$$dR = \frac{\rho_e(r)}{S(r)} dr$$

Donde $S(r)$ es la superficie de esta lámina conductora, y ρ_e es la resistividad eléctrica, que por definición es el inverso de la conductividad $g(r)$, es decir:

$$\rho_e(r) = \frac{1}{g(r)} \; \Rightarrow \; \rho_e(r) = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{kV} r$$

Como la lámina en este caso tiene forma esférica, se tiene que $S(r) = 4\pi r^2$, y entonces reemplazando en dR e integrando entre a y b para obtener la resistencia completa, se tiene que:

$$R = \int_a^b \frac{\rho_e(r)}{S(r)} dr = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi kV} \int_a^b \frac{dr}{r} \; \Rightarrow \; R = \frac{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi kV}$$

Ahora, por ley de Ohm para circuitos se tiene que $V = IR$, o en otras palabras $I = \frac{V}{R}$, y entonces:

$$\Rightarrow \; \boxed{I = \frac{4\pi kV^2}{\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

b) Para encontrar la densidad de carga volumétrica podemos usar la ley de Gauss en su forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Como $\vec{E}$ sólo tiene componente radial, entonces en la divergencia sólo sobrevive el término asociado a la coordenada radial, y entonces:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E(r)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} r\right) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(r) = \frac{\varepsilon_0 V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) r^2}}$$

P2. Conductividad no uniforme:

a) Como se está en un estado estacionario entonces $\partial_t \rho = 0$, entonces:

$$\Rightarrow \ \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Por la disposición del problema podemos inferir que las cargas se moverán en la dirección $\hat{z}$, con lo cual $\vec{J} = J\hat{z}$. Como sólo tiene componente z, entonces las derivadas con respecto a x e y en la divergencia se anulan, y entonces:

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial J}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \ J = J_0$$

Donde J_0 es una constante por ahora desconocida. Ahora, usando la ley de Ohm se sabe que $\vec{J} = g\vec{E}$, y usando que $\vec{E} = E\hat{z}$ desarrollamos:

$$\vec{J} = g\vec{E} \ \Rightarrow \ J_0 = g_0\left(1 + \frac{z}{L}\right)E(z) \ \Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{J_0}{g_0\left(1 + \frac{z}{L}\right)}\hat{z} \ \Rightarrow \ \vec{E}(z) = \frac{J_0 L}{g_0\left(L + z\right)}\hat{z} \tag{2}$$

Para encontrar la constante J_0 aplicamos el dato de que la diferencia de potencial entre las placas es V_0, entonces:

$$V_0 = \int_0^L \vec{E}(z) \cdot dz\hat{z} = \frac{J_0 L}{g_0}\int_0^L \frac{dz}{L+z} \ \Rightarrow \ V_0 = \frac{J_0 L}{g_0}\ln\left(\frac{L+L}{L}\right)$$

$$\Rightarrow \ J_0 = \frac{g_0 V_0}{L\ln(2)} \ \Rightarrow \ \boxed{\vec{J} = \frac{g_0 V_0}{L\ln(2)}\hat{z}}$$

Y reemplazando el valor de J_0 en la expresión para el campo eléctrico encontrada en (2), se tiene que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\vec{E}(z) = \frac{V_0}{\ln(2)(L+z)}\hat{z}}$$

b) Para la potencia disipada usamos la expresión dada por el efecto Joule:

$$P = \int \vec{J} \cdot \vec{E} dV$$

Donde dV es el diferencial de volumen de la región que estemos considerando. En este caso consideramos un cilindro de espesor h, con lo cual podemos usar el diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas $dV = rdrd\phi dz$, donde $r \in [0, a]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y $z \in \left[\frac{L}{2} - \frac{h}{2}, \frac{L}{2} + \frac{h}{2}\right]$, ya que recordamos que el disco a considerar está en medio del cilindro ($z = \frac{L}{2}$), y tiene espesor h. Por otro lado:

$$\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{g_0 V_0^2}{L\ln^2(2)(L+z)}$$

Entonces, reemplazando en la integral:

$$\Rightarrow \ P = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \frac{g_0 V_0^2}{L\ln^2(2)(L+z)} rdzd\phi dr$$

La integral con respecto a ϕ nos entrega un factor 2π, mientras que la integral con respecto a la coordenada radial nos entrega un factor $\frac{a^2}{2}$, entonces:

$$\Rightarrow\ P = \frac{g_0 V_0^2 \pi a^2}{L \ln^2(2)} \int_{\frac{L-h}{2}}^{\frac{L+h}{2}} \frac{dz}{(L+z)} \ \Rightarrow \ \boxed{P = \frac{g_0 V_0^2 \pi a^2}{L \ln^2(2)} \ln\left(\frac{3L+h}{3L-h}\right)}$$