FI2002-2 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Material complementario: Ecuación de Laplace, método de separación de variables, y series de Fourier.

29 de Mayo de 2020

1. Ecuación de Laplace:

La ecuación de Laplace es una ecuación a derivadas parciales (EDP) que se escribe como:

$$\nabla^2 u = 0 \tag{1}$$

Donde ∇^2 es el *operador laplaciano*, el cual cambia de forma dependiendo de las coordenadas en que se esté trabajando. En coordenadas cartesianas x, y y z la ecuación de Laplace tiene la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas ρ, ϕ, z se tiene:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3}$$

Y finalmente, en coordenadas esféricas r, θ, ϕ:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \tag{4}$$

Al ser un problema de derivadas parciales, se hace bastante difícil de abordar para el caso general, es decir, para el caso en que la función u depende de las tres coordenadas del sistema que estemos utilizando, sin embargo hemos visto hasta ahora en el curso que si nuestro sistema a estudiar tiene ciertas simetrías, entonces el problema puede resolverse en virtud de que algunas derivadas se hacen cero. Los casos con simetrías más comunes son:

I) **Problema unidimensional:** Si se tiene un problema en que nuestro sistema es unidimensional, entonces la función u (en el contexto de Electromagnetismo, u es el potencial) depende sólo de una variable, con lo cual puede estudiarse en coordenadas cartesianas diciendo que $u = u(x)$ y así las derivadas parciales con respecto a y y z se anulan (ya que u no depende de estas coordenadas) y entonces:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

II) **Simetría axial en cilindros infinitos:** Estos son los típicos ejemplos de cilindros/alambres infinitos con simetría axial o cilíndrica (es decir, el sistema "se ve" o se comporta de la misma forma al variar el ángulo azimutal). En estos casos la función u depende sólo de la coordenada radial, es decir, $u = u(\rho)$, y entonces las derivadas con respecto a z y al ángulo ϕ son cero. Así, la ecuación de Laplace queda:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{du}{d\rho}\right) = 0$$

III) **Simetría esférica:** Estos son los típicos ejemplos con simetría esférica, es decir, donde el sistema se comporta de la misma forma sin importar el ángulo (cenital o azimutal) desde el cual observemos. En estos casos la función u depende sólo de la coordenada radial, es decir, $u = u(r)$, y entonces las derivadas con respecto a θ y ϕ son cero. Así, la ecuación de Laplace queda:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0$$

IV) **Caso 2D en coordenadas cartesianas:** Estos son los casos en nuestro sistema es bidimensional, o en donde tenemos simetría en alguna de las tres coordenadas cartesianas, con lo cual la función u depende de a lo más dos coordenadas, es decir, $u = u(x, y)$. Con esto la derivada con respecto a la tercera coordenada (en este caso z) es cero, y así la ecuación de Laplace queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

V) **Caso cilíndrico con simetría en coordenada z:** Estos son casos donde se tienen alambres/cilindros infinitos, y por lo tanto se tiene simetría en el eje z, pero donde la simetría axial o cilíndrica se rompe por alguna razón (ver como ejemplo el sistema de la P1 del Auxiliar 8). Con esto la función u depende sólo de la coordenada radial y angular, es decir, $u = u(\rho, \phi)$, con lo cual la derivada con respecto a z se anula, y entonces la ecuación de Laplace queda:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

Los casos I), II) y III) pueden resolverse integrando directamente la EDO correspondiente. Como son EDO's de 2do orden, entonces en cada caso aparecerán un par de constantes de integración que deben determinarse con las condiciones de borde, que corresponde a saber el valor de u en un par de puntos del espacio. Un ejemplo para I) y II) puede verse en la P1 y P2 del Auxiliar 7, respectivamente, mientras que un ejemplo simple para III) puede ser la P1 del C1-2017 del profesor Chornik[1].

Los casos IV) y V) son un poco más complicados de abordar, y se resuelven a través del **método de separación de variables**. El método en el caso general se describirá brevemente en las secciones siguientes, así como los distintos detalles a tener en cuenta y las herramientas matemáticas involucradas (funciones ortogonales y series de Fourier), pero como ejemplos específicos se puede mencionar la P3 del Auxiliar 7 para el caso IV), y la P1 del Auxiliar 8 para el caso V).

2. Método de separación de variables:

El método de separación de variables para resolver EDP's, tal como sugiere su nombre, consiste en suponer soluciones para $u(x, y)$ de la forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, es decir, a pesar de que la función u depende de dos variables, la dependencia de cada una será a través de dos funciones distintas que se multiplican para formar $u(x, y)$. Esto es muy conveniente ya que la función $X(x)$ es una constante para las derivadas con respecto a y, e $Y(y)$ es una constante para las derivadas con respecto a x, es decir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(X(x)Y(y)\right) = Y(y)\frac{d^2X}{dx^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(X(x)Y(y)\right) = X(x)\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Donde las derivadas parciales se vuelven derivadas totales ya que $X(x)$ e $Y(y)$ dependen sólo de x e y, respectivamente, entonces es la única variable con respecto a la cual pueden derivarse (y viéndolo de esa forma, no tiene sentido entonces usar una derivada parcial, que se aplica en funciones de varias variables).

[1] `https://mega.nz/folder/T5JkDaSI#K3sod2GVeYTcZ-C7-VSeyQ/file/LxZAFaLS`

Reemplazando en la ecuación de Laplace se tendrá:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;\Rightarrow\; Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

Una parte importante en este método es que buscamos soluciones distintas de cero, es decir, $X(x) \neq 0$ e $Y(y) \neq 0$ para todo x e y, entonces podemos dividir por $X(x)Y(y)$ a ambos lados de la expresión anterior, con lo cual se tiene:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$$

Se puede notar que el lado izquierdo de la última igualdad depende sólo de x, mientras que el lado derecho de la igualdad depende sólo de la variable y. La única forma de que esta igualdad se cumpla es que ambos lados sean igual a una misma constante[2], es decir:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda$$

Con lo cual el problema de resolver una EDP se convierte en un problema de resolver dos EDO's:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda X = 0 \quad ; \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda Y = 0 \tag{5}$$

Estas EDO's se resuelven usando las condiciones de borde impuestas en el problema para cada una de las variables. El caso en coordenadas polares funciona exactamente igual. Si se tiene una función $u(\rho, \phi)$, usando separación de variables podemos escribir $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Theta(\phi)$, y entonces al seguir un procedimiento análogo[3] se llega al siguiente par de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda\frac{R}{r} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2\Theta}{d\phi^2} + \lambda\Theta = 0$$

Hasta ahora la gran novedad del método de separación de variables ya se deja en evidencia; nos permite convertir nuestro problema en dos ecuaciones que sabemos resolver de forma exacta. La gran desventaja del método hasta ahora es que tuvimos que invocar una constante λ desconocida. Para avanzar se toman por separados los casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$, y en general sólo uno de ellos permite la existencia de soluciones $X(x)$ y/o $Y(y)$ distintas de cero. Para efectos de este curso siempre tendremos una EDO relacionada a una solución tipo oscilador armónico. Por ejemplo, si suponemos que nuestro análisis nos entrega que $\lambda > 0$, entonces en el sistema (5) la ecuación para $Y(y)$ es la de un oscilador armónico cuya solución es[4]:

$$Y(y) = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\sin(\sqrt{\lambda}y)$$

[2]Ver Anexo 1 para la demostración.
[3]Revisar P1 del Auxiliar 8.
[4]A esta altura de la explicación vale la pena ir revisando un ejercicio en paralelo para poder entender, sugiero P3 del Auxiliar 7.

Ahora, las condiciones de borde sobre la función $Y(y)$ nos mostrarán que λ puede tomar infinitos valores distintos asociados cada uno a un número natural n, es decir, $\lambda = \lambda_n$, con lo cual se obtienen n soluciones distintas para $Y(y)$:

$$Y_n(y) = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} y) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} y)$$

Y de forma análoga, como se debe usar el mismo λ en ambas EDO's del sistema (5), se obtienen n soluciones para $X(x)$ de la forma $X_n(x)$. Como nuestra solución es la multiplicación de ambas funciones, se tiene que existen n soluciones distintas $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$, con $n \in \mathbb{N}$, y entonces la solución general $u(x, y)$ corresponde a una superposición de todas las funciones $u_n(x, y)$, es decir:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$$

$$\Rightarrow \; u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \left(A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} y) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} y) \right) \tag{6}$$

En este punto del problema se deben aplicar las condiciones de borde aún no aplicadas, en este caso la que corresponden a la variable x. Suponiendo que se tiene la condición de borde $u(x_0, y) = f(y)$, entonces se debe cumplir que:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x_0) \left(A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} y) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} y) \right)$$

$$\Rightarrow \; f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \cos(\sqrt{\lambda_n} y) + D_n \sin(\sqrt{\lambda_n} y) \right) \tag{7}$$

Donde se usó $C_n = A_n X_n(x_0)$ y $D_n = B_n X_n(x_0)$. Para finalizar, en general se tiene la siguiente forma para $\sqrt{\lambda_n}$:

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{2\pi n}{T}$$

Con lo cual la expresión (7) se convierte en:

$$\Rightarrow \; f(y) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) + D_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} y\right) \right) \tag{8}$$

Donde el caso $n = 0$ se omitió en la sumatoria porque $\sin(0) =$ y $\cos(0) = 1$ (lo cual explica la constante C_0 que aparece fuera de la serie). Matemáticamente la expresión (8) corresponde a la *serie de Fourier* de la función $f(y)$, la cual corresponde a una expansión en serie de senos y cosenos de la función $f(y)$ para $y \in [0, T]$. La serie queda completamente definida cuando se encuentran los valores de las constantes C_0, C_n y D_n, y recordando que $C_n = A_n X_n(x_0)$ y $D_n = B_n X_n(x_0)$, al encontrar C_n y D_n encontramos A_n y B_n, lo cual reemplazando en (6) nos permite encontrar completamente la solución $u(x, y)$. Entonces, el resolver la ecuación de Laplace a través del método de separación de variables exige que sepamos encontrar las constantes indeterminadas en una serie de Fourier, lo cual se explicará a continuación.

3. Series de Fourier:

Las series de Fourier son sumas infinitas de senos y cosenos que convergen a una función periódica en cierto intervalo. Si $f(t)$ es una función de variable real t integrable en el intervalo $[0, T]$, entonces esta puede ser escrita como una suma infinita de senos y cosenos, es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right] \tag{9}$$

Donde T corresponde al "período" o largo del intervalo en que se trabaja, y para caracterizar completamente esta serie es necesario encontrar las constantes a_0, a_n y b_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que debemos entender en el contexto de la ecuación de Laplace es que **se conoce** la forma de la función $f(t)$ explícitamente, entonces las constantes que buscamos pueden quedar expresadas en función de, por ejemplo, integrales, derivadas, o cualquier otra relación con la función $f(t)$. Para poder encontrar explícitamente estas constantes aprovecharemos la propiedad de *ortogonalidad* que poseen las funciones trigonométricas seno y coseno.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Las funciones seno y coseno cumplen la propiedad de **ortogonalidad**, las cual dice que:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) = \frac{T}{2}\delta_{mn} \quad ; \quad \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) = \frac{T}{2}\delta_{mn} \tag{10}$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) = 0 \tag{11}$$

Donde el término δ_{nm} se define por:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & ; \quad m \neq n \\ 1 & ; \quad m = n \end{cases}$$

Entonces podemos notar que la integral sólo será distinta de cero si m y n son iguales, además, independiente de si m y n son iguales o distintos, cuando se esté integrando un seno y un coseno en conjunto, la integral dará cero de todas formas. Esto es bastante conveniente puesto que nos presenta una forma de encontrar las constantes necesarias para completar el problema. Partiendo por a_n, podemos multiplicar la expresión (9) a ambos lados por un término $\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)$, y entonces:

$$\Rightarrow \; f(t)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) = \frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)\right]$$

Si integramos a ambos lados de la expresión anterior entre 0 y T, podemos notar que el primer término del lado derecho se anula puesto que la integral del coseno en un ciclo completo es cero, y entonces se tiene que:

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt + b_n \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt\right]$$

Notemos que en virtud de la expresión (11) la segunda integral del lado derecho se hace cero para todos los valores de n, con lo cual desaparece esa parte de la serie. Por otro lado, en virtud de la primera expresión en (10) las integrales asociadas al coseno son todas cero, excepto en el caso $m = n$, con lo cual el único término que sobrevive de la serie es el asociado a m, así:

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt = a_m \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt$$

Podemos cambiar m por n sin problemas en la expresión anterior (sólo corresponde a un cambio de nombre, por así decirlo), y desarrollando se tiene que:

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt = a_n \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt \;\Rightarrow\; a_n\frac{T}{2} = \int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$$

Donde se usó la condición de ortogonalidad para encontrar el valor de la 2da integral. Despejando entonces se obtiene finalmente:

$$\Rightarrow\; a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$$

Recordando que la función $f(t)$ es conocida en el contexto de la ecuación de Laplace (recordar el problema que estamos resolviendo), entonces la integral anterior puede calcularse sin problemas, con lo cual se obtienen las constantes a_n. Un procedimiento análogo permite encontrar las constantes b_n si multiplicamos la expresión (9) a ambos lados por $\sin\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)$ e integramos entre 0 y T, con lo cual se obtiene:

$$\Rightarrow\; b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)dt$$

Por último, para obtener la constante a_0 podemos integrar directamente la expresión (9) a ambos lados entre 0 y T. Como la integral de las funciones seno y coseno en un ciclo es cero, entonces todos los términos de la serie desaparecen, con lo cual se tiene que:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Como se obtienen las constantes indeterminadas en la serie de Fourier, entonces se obtiene la serie explícitamente, y aplicando este procedimiento al problema de resolver la ecuación de Laplace, nos permite encontrar las constantes C_0, C_n y D_n, con lo cual encontramos $u(x,y)$ y, por lo tanto, la solución al problema.

4. Casos "simples":

Con la sección anterior podemos notar que gran parte de resolver el problema de la ecuación de Laplace corresponde a encontrar la serie de Fourier de la función $f(t)$ (o $f(y)$ si volvemos al problema en sí). Los casos más simples con los cuales nos podemos encontrar son aquellos donde $f(t)$ **ya es una función que corresponde a suma de senos y cosenos**. Por ejemplo, supongamos que se tiene la función:

$$f(t) = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + e^3\cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$$

Entonces, igualando a la serie (9) se tiene que:

$$\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)+e^3\cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)\right]$$

Como el lado derecho de la expresión anterior ya corresponde a una suma de senos y cosenos, entonces es directo notar cuáles términos de la serie sobreviven, y por lo tanto es fácil identificar los valores de a_n y b_n, que son distintos de cero. Por ejemplo, el término $\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ está asociado a $n=1$ (ver el argumento de la función coseno), y por lo tanto $a_1=\frac{3}{4}$. Por otro lado el término $e^3\cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right)$ está asociado a $n=3$, con lo cual se tiene que $a_3=e^3$, y finalmente el término $\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$ está asociado a $n=2$, con lo cual $b_2=1$. Entonces, para este ejemplo, se tiene que:

$$a_n=\begin{cases}\frac{3}{4} & ; \quad n=1\\ e^3 & ; \quad n=3\\ 0 & ; \quad \text{en otro caso}\end{cases} \qquad ; \qquad b_n=\begin{cases}1 & ; \quad n=2\\ 0 & ; \quad \text{en otro caso}\end{cases}$$

Y entonces, como ya se conocen **todos** los términos de la serie de Fourier (sólo que infinitos de ellos son cero) se pueden encontrar las constantes que faltan para determinar la solución $u(x,y)$, y por lo tanto resolver el problema completamente.

La gracia de estos casos simples es que nos ahorramos todo el trabajo de integrar para obtener a_0, a_n y b_n, ya que estos pueden encontrarse a simple vista. El caso extremo en que este caso es MUY simple es aquel en que $f(t)$ es sólo un seno o un coseno, donde sólo sobrevive un término de la serie, y entonces sobrevive sólo un término en la solución $u(x,y)$. Saber identificar estos casos permiten ahorrar mucho tiempo y estrés relacionado a un procedimiento (las integrales) que puede resultar tedioso en este tipo de problemas.

* **Anexo 1:**

Queremos demostrar que si se tiene la igualdad:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{12}$$

Entonces ambos lados de la igualdad son iguales a una constante. Para verlo de forma simple podemos notar que el lado izquierdo de la igualdad anterior sólo depende de x, entonces podemos decir que es una función de x, o en otras palabras:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \omega(x)$$

Si derivamos esta expresión con respecto a y, obviamente nos dará cero, ya que $\omega(x)$ sólo depende de x, entonces:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}\right) = \frac{d\omega}{dy} = 0$$

Sin embargo, con la igualdad (12) podemos reemplazar lo que está dentro del paréntesis, y entonces:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dy}\left(-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}\right) = 0$$

Entonces, la segunda igualdad nos dice directamente que la función que se está derivando es igual a una constante (ya que la derivada es cero), entonces:

$$\Rightarrow\; -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = \lambda$$

Y en virtud de la igualdad (12), se tiene que:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \lambda$$

Con lo cual se demuestra lo buscado.