FI2002-2 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.

Pauta Auxiliar 8: Ecuación de Laplace (Parte 2).

26 de Mayo de 2020

P1. Ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

Como estamos en un ejercicio que involucra un cilindro, lo natural es usar coordenadas cilíndricas. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para el potencial V es:

$$\nabla^2 V = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Dada la simetría del problema podemos decir que la derivada con respecto a la coordenada z es cero. Por otro lado, a diferencia de otros ejercicios con cilindros, en este caso **NO** hay simetría axial (azimutal) ya que el potencial en el cilindro conductor depende de este ángulo, y por lo tanto el sistema se verá distinto en distintos ángulos. Entonces, la ecuación a derivadas parciales que debemos resolver es:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Con la condición de que en $r = R$ el potencial está dado por $V(R,\phi) = f(\phi)$ (esta es nuestra condición de borde). Para resolver esta EDP usamos el *método de separación de variables* usado en la clase auxiliar anterior, donde suponemos que $V(r,\phi) = R(r)\Theta(\phi)$, entonces los términos de la EDP pueden desarrollarse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{\Theta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) \quad ; \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\phi^2}$$

Entonces, escribiendo las derivadas con notación de comillas, tendremos que:

$$\frac{\Theta}{r}\frac{d}{dr}(rR') + \frac{R}{r^2}\Theta'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{r}{R}\frac{d}{dr}(rR') + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$
$$\Rightarrow\; \frac{r}{R}\frac{d}{dr}(rR') = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

Como ambos lados de la igualdad dependen de variables distintas (r y ϕ, respectivamente), entonces ambas deben ser iguales a una constante, es decir:

$$\Rightarrow\; \frac{r}{R}\frac{d}{dr}(rR') = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \alpha$$

Entonces se obtienen dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dr}(rR') - \alpha\frac{R}{r} = 0 \quad ; \quad \Theta'' + \alpha\Theta = 0 \tag{1}$$

Una condición importante en los ejercicios que involucran coordenadas cilíndricas es que la solución debe ser periódica en la variable angular, cuyo período debe ser 2π, para que el resultado tenga sentido físico. Entonces, partamos por resolver la ecuación para $\Theta(\phi)$, e imponiendo esta condición podemos encontrar el comportamiento del signo de la constante α. Si $\alpha < 0$ entonces la solución es:

$$\Theta(\phi) = A \exp\left(\sqrt{|\alpha|}\phi\right) + B \exp\left(-\sqrt{|\alpha|}\phi\right)$$

Esta solución no presenta un comportamiento periódico, puesto que presenta un comportamiento creciente/decreciente exponencial, entonces se descarta el caso $\alpha < 0$. Para el caso $\alpha = 0$:

$$\Rightarrow \; \Theta(\phi) = A + B\phi$$

El comportamiento periódico que buscamos nos indica que $B = 0$, con lo cual:

$$\alpha = 0 \; \Rightarrow \; \Theta(\phi) = A \tag{2}$$

Lo cual es una solución válida. Finalmente, usando $\alpha > 0$:

$$\Rightarrow \; \Theta(\phi) = A\cos(\sqrt{\alpha}\phi) + B\sin(\sqrt{\alpha}\phi)$$

Para que el comportamiento sea periódico debemos imponer que $\Theta(\phi) = \Theta(\phi + 2\pi)$, es decir:

$$A\cos(\sqrt{\alpha}\phi) + B\sin(\sqrt{\alpha}\phi) = A\cos(\sqrt{\alpha}(\phi + 2\pi)) + B\sin(\sqrt{\alpha}(\phi + 2\pi))$$

Como las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son periódicas con período 2π, entonces la igualdad anterior exige que $2\pi\sqrt{\alpha} = 2\pi n$, con $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$\Rightarrow \; \alpha = n^2$$

Con lo cual, para $\alpha = n^2 > 0$, se tienen soluciones de la forma:

$$\Theta(\phi) = B\cos(n\phi) + C\sin(n\phi) \tag{3}$$

Ahora que "conocemos" α y la (forma de la) solución para $\Theta(\phi)$, vemos la ecuación diferencial para $R(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(rR'\right) - \alpha\frac{R}{r} = 0$$

Desarrollamos el caso $\alpha = 0$:

$$\frac{d}{dr}\left(rR'\right) = 0 \; \Rightarrow \; rR' = D \; \Rightarrow \; R' = \frac{D}{r} \; \Rightarrow \; R(r) = D\ln(r) + E$$

Una condición importante es que nuestra solución debe ser finita en la región en que estamos trabajando, y como $\ln(r)$ se indefine para $r = 0$, entonces inmediatamente podemos decir que $C = 0$, con lo cual, para $\alpha = 0$:

$$\Rightarrow \; R(r) = E \tag{4}$$

Para el caso $\alpha = n^2$, la ecuación es:

$$\frac{d}{dr}\left(rR'\right) - n^2\frac{R}{r} = 0 \;\Rightarrow\; R' + rR'' - n^2\frac{R}{r} = 0 \;\Rightarrow\; r^2R'' + rR' - n^2R = 0 \tag{5}$$

Para esta ecuación diferencial se usa una solución del estilo $R(r) = Fr^{\lambda}$, entonces:

$$R'(r) = \lambda F r^{\lambda-1} \;\Rightarrow\; R''(r) = \lambda(\lambda-1)Fr^{\lambda-2}$$

Con lo cual, reemplazando en la expresión (5), se tendrá que:

$$\lambda(\lambda-1)Fr^{\lambda} + \lambda F r^{\lambda} - n^2 F r^{\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - n^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm n$$

$$\Rightarrow\; R(r) = Fr^n + Gr^{-n}$$

Nuevamente, como la solución debe mantenerse finita en nuestro dominio, entonces podemos descartar las soluciones divergentes, con lo cual podemos decir que $G = 0$, y entonces, para $\alpha = n^2$:

$$R(r) = Fr^n \tag{6}$$

Como ya tenemos las soluciones para $R(r)$ y $\Theta(\phi)$, entonces tenemos la solución para $V(r,\phi) = R(r)\Theta(\phi)$, así:

$$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; V(r,\phi) = E\cdot A = A_0$$
$$\alpha = n^2 \;\Rightarrow\; V(r,\phi) = Er^n\left(B\cos(n\phi) + C\sin(n\phi)\right) \;\Rightarrow\; V(r,\phi) = r^n\left(H\cos(n\phi) + J\sin(n\phi)\right)$$

Donde se juntaron las constantes para reducir la expresión. Entonces, ya tenemos las soluciones para todos los casos posibles para α. Como obtuvimos valores para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, la solución general será una superposición de todos los valores posibles de n, entonces:

$$\Rightarrow\; V(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(H_n\cos(n\phi) + J_n\sin(n\phi)\right) \tag{7}$$

Para encontrar las constantes que nos faltan debemos imponer la condición de borde que manejamos, es decir:

$$V(R,\phi) = V_o(\phi^2 - 2\pi\phi) \;\Rightarrow\; V_o(\phi^2 - 2\pi\phi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_nR_0^n\cos(n\phi) + J_nR_0^n\sin(n\phi)\right) \tag{8}$$

Para encontrar las constantes se procede como en la clase auxiliar anterior. Las funciones trigonométricas sin y cos cumplen la propiedad de ortogonalidad, donde:

$$\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right)\cos\left(\frac{2\pi m}{a}x\right) = \frac{a}{2}\delta_{mn} \quad ; \quad \int_0^a \sin\left(\frac{2\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi m}{a}x\right) = \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

Donde el término δ_{mn} nos dice que la integral será distinta de cero sólo en el caso $m = n$.

En nuestro caso se tiene que $a = 2\pi$. Entonces, si multiplicamos la expresión (8) por $\cos(m\phi)$ e integramos entre 0 y 2π, por la condición de ortogonalidad (reflejada en el término δ_{mn}) sólo sobrevive el término asociado a $m = n$, es decir:

$$\int_0^{2\pi} V_o(\phi^2 - 2\pi\phi)\cos(n\phi)d\phi = A_0 \int_0^{2\pi} \cos(n\phi)d\phi + H_n R_0^n \int_0^{2\pi} \cos(n\phi)\cos(n\phi)d\phi$$

La primera integral del lado derecho se anula por la periodicidad de la función $\cos(n\phi)$, mientras que la segunda integral está dada por la condición de ortogonalidad, entonces:

$$\Rightarrow \; H_n R_0^n \frac{2\pi}{2} = V_o \int_0^{2\pi} (\phi^2 - 2\pi\phi)\cos(n\phi)d\phi \tag{9}$$

La integral que nos falta puede calcularse integrando por partes. Partiendo por la integral asociada a ϕ^2, usamos:

$$u = \phi^2 \;\Rightarrow\; du = 2\phi d\phi \quad ; \quad dv = \cos(n\phi)d\phi \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\sin(n\phi)$$

Entonces:

$$\int_0^{2\pi} \phi^2 \cos(n\phi)d\phi = \left[\frac{\phi^2}{n}\sin(n\phi)\right]\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} \phi\sin(n\phi)d\phi = -\frac{2}{n}\int_0^{2\pi} \phi\sin(n\phi)d\phi$$

Nuevamente integramos por partes:

$$u = \phi \;\Rightarrow\; du = d\phi \quad ; \quad dv = \sin(n\phi)d\phi \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{n}\cos(n\phi)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \; \int_0^{2\pi} \phi^2 \cos(n\phi)d\phi = -\frac{2}{n}\left\{\left[-\frac{\phi}{n}\cos(n\phi)\right]\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos(n\phi)d\phi\right\}$$

$$\Rightarrow \; \int_0^{2\pi} \phi^2 \cos(n\phi)d\phi = \frac{4\pi}{n^2}$$

Siguiendo la misma estrategia, se resuelve la integral asociada a $2\pi\phi$ en la expresión (9) usando integración por partes:

$$u = \phi \;\Rightarrow\; du = d\phi \quad ; \quad dv = \cos(n\phi)d\phi \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n}\sin(n\phi)$$

Entonces:

$$2\pi\int_0^{2\pi} \phi\cos(n\phi)d\phi = 2\pi\left\{\left[\frac{\phi}{n}\sin(n\phi)\right]\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin(n\phi)d\phi\right\} = 0$$

Entonces, se tiene que:

$$\Rightarrow \; V_o\int_0^{2\pi} (\phi^2 - 2\pi\phi)\cos(n\phi)d\phi = \frac{4\pi V_o}{n^2} \;\Rightarrow\; H_n R_0^n \pi = \frac{4\pi V_o}{n^2} \;\Rightarrow\; H_n = \frac{4V_o}{R_0^n n^2} \tag{10}$$

Ahora, para obtener J_n se hace un procedimiento similar. Multiplicamos la expresión (8) por $\sin(m\phi)$ e integramos entre 0 y 2π. Por la condición de ortogonalidad (reflejada en el término δ_{mn}) sólo sobrevive el término asociado a $m = n$, es decir:

$$\int_0^{2\pi} V_o(\phi^2 - 2\pi\phi)\sin(n\phi)d\phi = A_0\int_0^{2\pi}\sin(n\phi)d\phi + J_nR_0^n\int_0^{2\pi}\sin(n\phi)\sin(n\phi)d\phi$$

La primera integral del lado derecho se anula por la periodicidad de la función $\sin(n\phi)$, mientras que la segunda integral está dada por la condición de ortogonalidad, entonces:

$$\Rightarrow\ J_nR_0^n\frac{2\pi}{2} = V_o\int_0^{2\pi}(\phi^2 - 2\pi\phi)\sin(n\phi)d\phi \tag{11}$$

La integral que nos falta puede calcularse integrando por partes. Partiendo por la integral asociada a ϕ^2, usamos:

$$u = \phi^2\ \Rightarrow\ du = 2\phi d\phi\quad;\quad dv = \sin(n\phi)d\phi\ \Rightarrow\ v = -\frac{1}{n}\cos(n\phi)$$

Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\phi^2\sin(n\phi)d\phi = \left[-\frac{\phi^2}{n}\cos(n\phi)\right]\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\phi\cos(n\phi)d\phi = -\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\phi\cos(n\phi)d\phi$$

Nuevamente integramos por partes:

$$u = \phi\ \Rightarrow\ du = d\phi\quad;\quad dv = \cos(n\phi)d\phi\ \Rightarrow\ v = \frac{1}{n}\sin(n\phi)$$

Entonces:

$$\int_0^{2\pi}\phi^2\sin(n\phi)d\phi = -\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\left\{\left[\frac{\phi}{n}\sin(n\phi)\right]\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin(n\phi)d\phi\right\}\ \Rightarrow\ \int_0^{2\pi}\phi^2\sin(n\phi)d\phi = -\frac{4\pi^2}{n}$$

Siguiendo la misma estrategia, se resuelve la integral asociada a $2\pi\phi$ en la expresión (11) usando integración por partes:

$$u = \phi\ \Rightarrow\ du = d\phi\quad;\quad dv = \sin(n\phi)d\phi\ \Rightarrow\ v = -\frac{1}{n}\cos(n\phi)$$

Entonces:

$$2\pi\int_0^{2\pi}\phi\sin(n\phi)d\phi = 2\pi\left\{\left[-\frac{\phi}{n}\cos(n\phi)\right]\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(n\phi)d\phi\right\}\ \Rightarrow\ 2\pi\int_0^{2\pi}\phi\sin(n\phi)d\phi = -\frac{4\pi^2}{n}$$

Entonces, al juntar ambas integrales, notamos que:

$$\Rightarrow\ V_o\int_0^{2\pi}(\phi^2 - 2\pi\phi)\sin(n\phi)d\phi = V_o\left[-\frac{4\pi^2}{n} - \left(-\frac{4\pi^2}{n}\right)\right]\ \Rightarrow\ J_nR^n\pi = 0\ \Rightarrow\ J_n = 0 \tag{12}$$

Finalmente, para calcular A_0 integramos directamente la expresión (8) entre 0 y 2π, de tal forma que las expresiones con *sin* y *cos* se anulan por periodicidad. Entonces:

$$A_0 = \frac{V_o}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\phi^2 - 2\pi\phi)d\phi = \frac{V_o}{2\pi}\left[\frac{8\pi^3}{3} - 2\pi\frac{4\pi^2}{2}\right] \Rightarrow A_0 = -\frac{2\pi^2 V_o}{3} \tag{13}$$

Entonces, reemplazando las expresiones encontradas en (10), (12) y (13) en la expresión (7), se concluye que:

$$\Rightarrow \boxed{V(r,\phi) = -\frac{2}{3}\pi^2 V_o + 4V_o\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{r}{R_0}\right)^n \cos(n\phi)}$$