

FI2002-2 Electromagnetismo.

Profesor: Marcel Clerc.

Auxiliares: Guido Escudero, Roberto Gajardo.



Pauta Auxiliar 4: Ley de Gauss.

21 de Abril de 2020

* La idea tras la ley de Gauss:

Con las herramientas aprendidas hasta ahora en el curso (y ejercitadas en los auxiliares 1 y 2) somos capaces de calcular el campo eléctrico de cualquier distribución de carga (lineal, superficial y/o volumétrica) siempre y cuando seamos capaces de calcular las integrales involucradas en estos campos, sin embargo, como quizás ya se dieron cuenta, existen casos para los cuales las integrales son bastante difíciles, o requieren de un cálculo extenso y tedioso. Ante esa dificultad, la herramienta fisicomatemática que nos salvará es la maravillosa **ley de Gauss**¹.

La idea de la ley de Gauss se hará un poco más intuitiva (o al menos un poco más entendible) si interpretamos el campo eléctrico como flechas (vectores). Pensemos en una carga puntual, donde las líneas de campo salen desde la carga hacia el infinito², tal como se muestra en la siguiente figura:

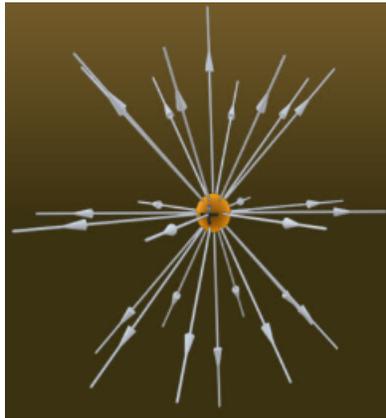


Figura 1: Líneas de campo asociadas a una carga puntual.

Es importante entender el hecho de que **las líneas de campo dibujadas son proporcionales a la carga que tienen asociada**, por ejemplo, si tenemos una carga q y otra $2q$, debemos dibujar el doble de líneas de campo para la segunda carga mencionada. Observar el campo de esta manera nos permite identificar su dirección y sentido (representado por las flechas) mientras que la intensidad del campo se representa por la densidad de las líneas de campo (es más intenso en el origen, donde las líneas están más juntas, que a una distancia r , donde están bastante más separadas). Por otro lado, esta forma nos permite ver que la densidad de líneas de campo que cruzan una esfera a una distancia r es $\frac{N}{4\pi r^2}$.

Ahora, para dibujar las líneas de campo debemos entender que estas *emanan* de las cargas positivas y *entran* en las cargas negativas, de tal forma que las líneas de campo o se extienden hasta el infinito, o conectan cargas positivas y negativas. Además, las líneas de campo no pueden intersectarse, ya que esto correspondería a que el campo eléctrico se “bifurca” en algún punto arbitrario, lo cual no tiene sentido (correspondería a una flecha que apunta en dos direcciones distintas al mismo tiempo), por lo tanto las líneas de campo de cargas con signo idéntico se deben repeler.

¹Una buena referencia para entender conceptualmente el origen de esta ley es el libro “Introduction to Electrodynamics” de David J. Griffiths. Esta sección es en parte una traducción de sus ideas.

²En el vacío las líneas de campo no pueden terminar en algún punto arbitrario, o $\nabla \cdot \vec{E}$ no sería cero.

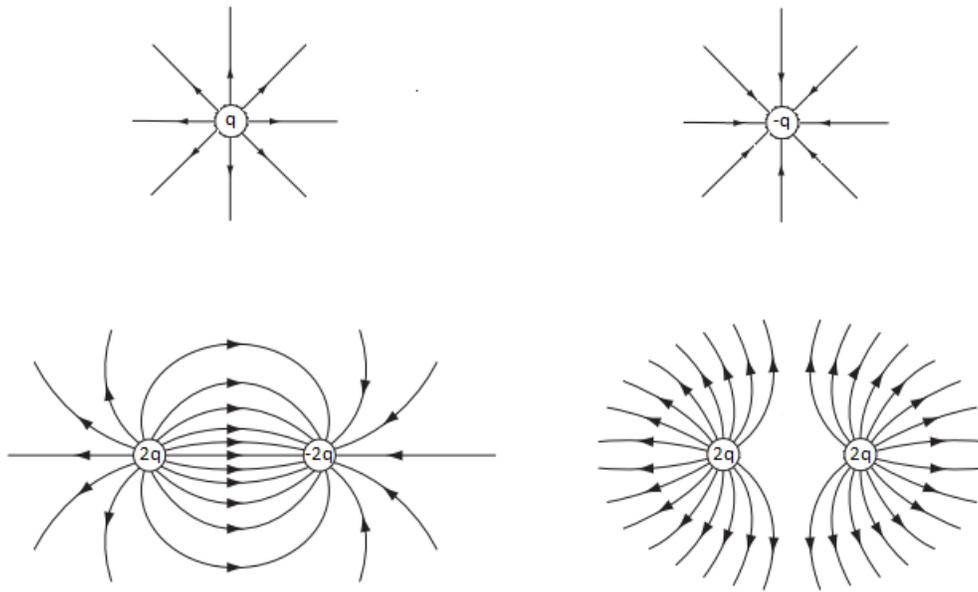


Figura 2: Líneas de campo para las distintas situaciones descritas (notar cargas y cantidad de líneas de campo asociada).

Ahora, el flujo de campo eléctrico a través de una superficie A está descrito por la siguiente expresión:

$$\phi_E = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{a} \tag{1}$$

Recordamos que en nuestro modelo de líneas de campo, la intensidad del campo eléctrico es proporcional a la densidad de líneas de campo que atraviesan cierta superficie, por lo tanto el término $\vec{E} \cdot d\vec{a}$ puede entenderse como la cantidad de líneas de campo que atraviesan una superficie infinitesimal $d\vec{a}$. El producto punto en la definición (1) es importante, pues nos dice que tomamos la contribución del campo eléctrico que es perpendicular a cada diferencial de área, de tal forma que el flujo que contamos es aquel que sale directamente de la superficie A , tal como se muestra en la siguiente figura:

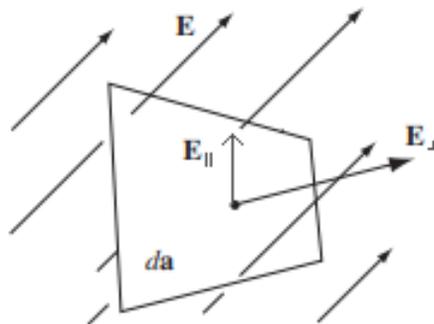


Figura 3: Campo \vec{E} cruzando una superficie infinitesimal $d\vec{a}$. El producto punto entre \vec{E} y $d\vec{a}$ nos asegura que tomamos la componente del campo que efectivamente sale de nuestra superficie (\vec{E}_{\perp}), mientras que ignoramos la componente paralela (\vec{E}_{\parallel}).

Entonces, si nuestra superficie A es una superficie cerrada, podemos decir que **el flujo de campo eléctrico es proporcional a las líneas de campo que atraviesan la superficie A** , pero como dijimos anteriormente, las líneas de campo son proporcionales a la carga asociada, con lo cual podemos concluir que **el flujo de campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada A es proporcional a la carga que encierra esta superficie**.

Para cargas positivas/negativas *dentro* de la superficie, las líneas de campo deben entrar/salir en otra carga negativa/positiva (con lo cual parte del flujo o el total de este se cancela), o bien extenderse hacia/desde el infinito, atravesando nuestra superficie (y contribuyendo al flujo). Por otro lado, para cargas positivas/negativas *fuera* de la superficie las líneas de campo que se extienden hacia/desde el infinito atraviesan nuestra superficie por un lado y salen por el otro, con lo cual el flujo que aportan es nulo. Estos casos se muestran en el siguiente dibujo:

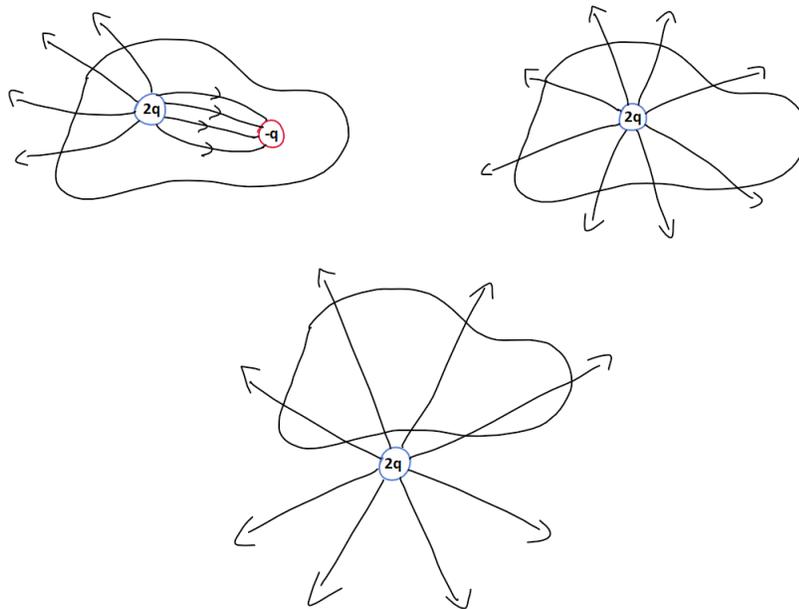


Figura 4: Representación del flujo neto que aportan distintas cargas en una superficie cerrada. En los casos superiores la carga neta dentro de la superficie es distinta de cero, por lo tanto deben haber líneas de campo que atraviesen la superficie (porque son proporcionales a la carga). En el caso inferior una carga fuera de la superficie no aporta al flujo, puesto que las líneas de campo entran y luego salen de la superficie cerrada.

Entonces, la esencia de la ley de Gauss radica en el hecho de que la “cantidad de campo eléctrico” que emite una carga (densidad de líneas de campo) es proporcional a $\frac{1}{r^2}$ (más precisamente, $\frac{N}{4\pi r^2}$), mientras que una superficie en el espacio es proporcional a r^2 . La multiplicación de estas dos cantidades nos muestran que las líneas de campo que atraviesan cierta superficie (flujo) son una cantidad constante, y como la cantidad de líneas es proporcional a la carga que las emite, entonces el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada, y se mantiene constante sea cual sea el valor de r .

Para verlo de forma cuantitativa, veamos el flujo que genera una carga puntual en una superficie cerrada cualquiera. Usamos el campo eléctrico de una carga puntual en coordenadas esféricas:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Podemos usar coordenadas esféricas para modelar cualquier superficie, por lo tanto usamos el diferencial de superficie $d\vec{S}$ en coordenadas esféricas³:

$$d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r} + r \sin(\theta) dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$$

Como el campo eléctrico de nuestra carga puntual sólo tiene dirección \hat{r} , entonces al hacer el producto punto los últimos dos términos de la expresión anterior se anulan, es decir:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (2)$$

Es importante detenerse acá y pensar que en ningún momento hemos asumido que nuestra superficie es esférica, sólo usamos coordenadas esféricas para modelar nuestro problema, pero eso no quiere decir, por ejemplo, que r es constante (lo cual correspondería a una esfera). La gracia del diferencial $d\vec{S}$ en esféricas es que puede describir cualquier superficie, por compleja que sea, sólo variando los parámetros r , θ y ϕ , y entonces una superficie cerrada, pero no esférica, correspondería a ir variando el valor de r para que los puntos se vayan alejando o acercando, según corresponda. Hasta ahí, nuestro problema sigue siendo complejo ya que deberíamos conocer cómo varía r para cada punto de cada superficie que vayamos a usar (es decir, deberíamos conocer $r(\theta, \phi)$ para poder integrar), sin embargo vemos en la expresión (2) que nuestros r^2 se cancelan, por lo tanto $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ no depende del radio, y entonces sea cual sea la forma de nuestra superficie, no nos interesa, pues sólo estamos usando la información de que es **cerrada** (es decir, información explícita de los ángulos θ y ϕ). De esa forma vemos que nuestra integral es simplemente:

$$\phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (3)$$

Es decir, hasta ahora se cumple lo que inferimos con las líneas de campo, y es que el flujo de la carga puntual es constante, y es directamente proporcional a la carga encerrada q .

Ahora, pensemos que en vez de una carga puntual tenemos n cargas puntuales repartidas dentro de nuestra superficie. Por principio de superposición sabemos que el campo total \vec{E} será la suma de los campos individuales \vec{E}_i , y entonces:

$$\phi_E = \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_A \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n \left(\oint_A \vec{E}_i \cdot d\vec{S} \right)$$

De la expresión (3) vemos que cada una de esas integrales es $\frac{q_i}{\epsilon_0}$, es decir:

$$\Rightarrow \phi_E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right) \Rightarrow \phi_E = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Entonces, obtenemos que el flujo debido a una colección de cargas a través de una superficie cerrada A es una cantidad constante que **no** depende de la forma de la superficie, y que además es proporcional a la carga encerrada. Ahora, como una distribución continua de cargas puede modelarse como una suma de cargas infinitesimales, este resultado sigue siendo válido en el caso continuo.

La ley de Gauss no nos entrega más información que la que ya conocíamos hasta ahora, ya que sólo necesitamos usar cómo varían los campos de cargas puntuales (ley de Coulomb), y principio de superposición de

³https://es.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_esfericas#Diferenciales_de_superficie

campos eléctricos. La gracia de conocer esta nueva ley es que es **por lejos** la forma más rápida y sencilla de calcular campos eléctricos de distribuciones de carga con cierta simetría espacial. En particular, las simetrías que buscamos son:

- I) Simetría esférica: En ese caso usamos como superficie de integración una esfera y usamos $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$ en coordenadas esféricas.
- II) Simetría cilíndrica o axial: En ese caso usamos como superficie de integración un cilindro coaxial y usamos $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$ en coordenadas cilíndricas.
- III) Simetría planar: Se usa una caja rectangular o cilíndrica que sea atravesada por nuestro plano cargado (buscar ejemplo del plano infinito usando ley de Gauss).

Finalmente, la ley de Gauss es una de las cuatro *ecuaciones de Maxwell*, la cual puede escribirse de forma diferencial si usamos el *teorema de la divergencia*:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dV$$
$$\Rightarrow \int_v (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Donde ρ es la densidad volumétrica de carga.

La finalidad de los ejercicios escritos a continuación es ejercitar las distintas aplicaciones que tiene la ley de Gauss al momento de calcular campos eléctricos de distribuciones de carga que tienen (o parecen tener) cierta simetría espacial.

P1. Campo eléctrico de un cilindro perforado:

Para poder abordar esta pregunta pensemos cómo podemos interpretar una perforación en un cilindro *cargado*. Una perforación es simplemente una región del espacio sin carga, o mejor dicho aún, con carga *nula*. Esto significa que podemos representar ese vacío como la suma de cargas positivas y cargas negativas de exactamente el mismo módulo, o mejor aún, podemos representar este vacío como la suma de dos esferas cargadas con densidad uniforme σ y $-\sigma$. La esfera de densidad uniforme σ completa al cilindro, con lo cual podemos calcular el campo eléctrico de un cilindro infinito uniforme, mientras que por otro lado el principio de superposición nos permite modelar el agujero sumando el campo eléctrico generado por la esfera imaginaria de densidad uniforme $-\sigma$ a nuestro resultado, así eliminaremos la contribución de todas esas cargas positivas que invocamos para completar el cilindro.

En resumen, si queremos calcular el campo eléctrico a una distancia ρ en una altura h , podemos calcular el campo eléctrico de un cilindro infinito macizo, el campo eléctrico de una esfera de densidad de carga negativa, y luego sumarlos en virtud del principio de superposición.

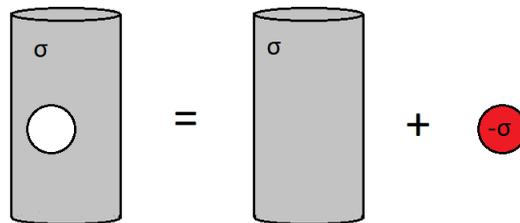
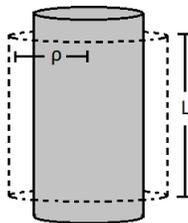


Figura 5: Diagrama que ilustra lo dicho anteriormente.

Como las dos configuraciones que trabajaremos tienen algún tipo de simetría (axial y esférica) usaremos la **ley de Gauss**. Recordamos que la ley de Gauss indica que el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es constante y proporcional a la carga encerrada, es decir:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Partamos con el cilindro. Notamos que en este caso tenemos simetría cilíndrica o *axial*, ya que el cilindro es el mismo independiente del ángulo azimutal ϕ en el cual lo veamos, por lo tanto usamos como superficie de integración (o gaussiana) un cilindro coaxial a nuestro cilindro cargado:



Como nuestro cilindro es infinito, por simetría inferimos que el campo eléctrico no puede depender de la altura⁴, por otro lado, como la superficie gaussiana que usamos debe ser finita, usamos un cilindro de largo L , sin embargo, ya veremos que este largo no importará en nuestro resultado (dado, nuevamente, a que tenemos la simetría en el eje z).

⁴Ni tampoco de la dirección \hat{z} . Es por eso que no tomamos en cuenta las tapas del cilindro, las cuales de otra forma si serían necesarias para que la superficie gaussiana sea *cerrada*.

Entonces, dadas la simetría axial y la simetría en el eje z , inferimos que el campo eléctrico sólo depende del radio ρ , y sólo puede apuntar en la dirección $\hat{\rho}$, es decir, $\vec{E}_c = E_c(\rho)\hat{\rho}$. Por otro lado, dado que usamos la superficie cilíndrica, entonces usamos el diferencial $d\vec{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho}$, donde los límites de integración son los límites asociados a nuestra superficie de integración, es decir, $\phi \in [0, 2\pi]$ y $z \in [0, L]$, entonces:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^L \int_0^{2\pi} E_c(\rho)\hat{\rho} \cdot \rho d\phi dz \hat{\rho} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^L \int_0^{2\pi} E_c(\rho)\rho d\phi dz = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Podemos sacar $E(\rho)$ y ρ de nuestra integral, puesto que no dependen del ángulo ni de la altura, mientras que la carga encerrada por el cilindro de integración Q_{enc} es simplemente la carga asociada a la porción de altura L del cilindro infinito, que vendría a ser la densidad volumétrica de carga uniforme σ por el volumen del cilindro de radio R y largo L (porción del cilindro infinito), es decir:

$$Q_{enc} = \pi R^2 L \sigma$$

Entonces, reemplazando e integrando:

$$\Rightarrow E_c(\rho)\rho \int_0^L \int_0^{2\pi} d\phi dz = \frac{\pi R^2 L \sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow 2\pi L E_c(\rho)\rho = \frac{\pi R^2 L \sigma}{\epsilon_0}$$

En este punto notamos que el largo L se cancela a ambos lados de la expresión (que era lo que esperábamos), y reordenando tendremos que:

$$\Rightarrow E_c(\rho) = \frac{R^2 \sigma}{2\epsilon_0 \rho} \Rightarrow \vec{E}_c(\rho) = \frac{R^2 \sigma}{2\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} \quad (5)$$

Ahora debemos calcular el campo eléctrico de la esfera de densidad volumétrica de carga $-\sigma$ y radio R_0 . Como es una esfera, tenemos simetría esférica, y entonces usamos como superficie gaussiana una esfera de radio r . Es importante entender que, dado la geometría del problema, este radio r está relacionado con ρ y la altura h :

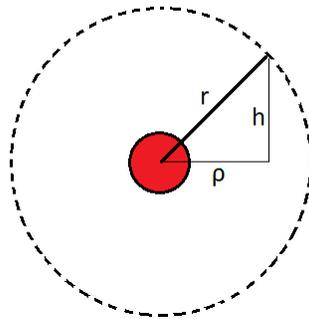


Figura 6: Superficie gaussiana para la esfera.

Como hay simetría esférica, entonces el campo eléctrico no puede depender de ninguno de los ángulos ϕ o θ , puesto que no hay direcciones privilegiadas en una esfera, por lo tanto sólo puede depender de r . Por otro lado, el campo eléctrico sólo puede apuntar en la dirección \hat{r} , también por la simetría esférica, y entonces tendremos que $\vec{E}_s = E_s(r)\hat{r}$. Ahora, dado que usamos la simetría esférica, debemos usar el diferencial $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$, donde los límites de integración son los límites asociados a nuestra superficie de integración (esfera cerrada), es decir, $\phi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$.

Por último antes de integrar, veamos que la carga encerrada por nuestra superficie gaussiana es la carga total de la esfera de densidad de carga volumétrica $-\sigma$, por lo tanto Q_{enc} corresponde a $-\sigma$ por el volumen de la esfera, es decir:

$$Q_{enc} = -\frac{4}{3}\pi R_0^3 \sigma$$

Entonces, aplicando toda esta información en la ley de Gauss, tendremos que:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E_s(r) \hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r} = -\frac{4\pi R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0}$$

Notamos que $E(r)$ y r^2 pueden salir de la integral, y entonces:

$$\Rightarrow E_s(r) r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta d\phi = -\frac{4\pi R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0} \Rightarrow 4\pi E_s(r) r^2 = -\frac{4\pi R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0}$$

Cancelamos el término 4π a ambos lados de la igualdad, y desarrollando obtenemos que:

$$\Rightarrow E_s(r) = -\frac{R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}_s(r) = -\frac{R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (6)$$

Ahora, como tenemos los dos campos calculados, entonces por principio de superposición el campo del cilindro con la perforación será la suma del campo del cilindro macizo con densidad de carga σ encontrado en (5) con el campo de la esfera con densidad de carga $-\sigma$ encontrado en (6), es decir:

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_s \Rightarrow \vec{E} = \frac{R^2 \sigma}{2\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} - \frac{R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (7)$$

Esta última expresión aún no está completa, ya que debemos escribir el campo con dependencia en ρ (es decir, debemos encontrar r en función de ρ) y escribirlo en la misma base de vectores (es decir, debemos escribir \hat{r} como combinación de vectores de la base cilíndrica). Para escribir r en función de ρ notemos la Figura 6, donde por teorema de pitágoras:

$$r^2 = \rho^2 + h^2 \Rightarrow r = \sqrt{\rho^2 + h^2}$$

Usando el mismo dibujo podemos ser capaces de encontrar una relación entre \hat{r} , $\hat{\rho}$ y \hat{z} , y vemos que:

$$\hat{r} = \cos(\alpha) \hat{\rho} + \sin(\alpha) \hat{z}$$

Donde α es el ángulo que forma \hat{r} con $\hat{\rho}$. Por trigonometría podemos encontrar que:

$$\cos(\alpha) = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \quad ; \quad \sin(\alpha) = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}$$

Entonces, reemplazando esto en la expresión (7), tendremos que:

$$\Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{R^2 \sigma}{2\epsilon_0 \rho} \hat{\rho} - \frac{R_0^3 \sigma}{3\epsilon_0 (\rho^2 + h^2)} \left(\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \hat{\rho} + \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}} \hat{z} \right)$$

Desarrollando obtenemos finalmente que:

$$\Rightarrow \vec{E}(\rho) = \left(\frac{R^2\sigma}{2\varepsilon_0\rho} - \frac{R_0^3\sigma\rho}{3\varepsilon_0(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \hat{\rho} - \frac{R_0^3\sigma h}{3\varepsilon_0(\rho^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

Notamos que en el caso $R_0 = 0$ se recupera el campo eléctrico de un cilindro macizo.

P2. Campo eléctrico de un átomo:

Tenemos la siguiente densidad volumétrica de carga:

$$\rho(r) = \frac{Zq\alpha}{4\pi r^2}(1 - \alpha r)e^{-\alpha r}$$

Podemos notar que, a diferencia de la pregunta anterior, esta vez la densidad de carga **no** es uniforme, ya que cambia a medida que nos distanciamos del átomo, sin embargo, esta densidad sólo depende de la coordenada radial r , por lo tanto nuestro problema tiene simetría esférica. Para entenderlo podemos pensar en esta densidad como una nube no uniforme, es decir, que se va “adelgazando” a medida que aumentamos r , sin embargo, la nube se sigue viendo de la misma forma sin importar el ángulo desde el cual la miremos, lo cual se refleja en la no-dependencia de ρ en los ángulos θ y ϕ . Con esto en mente, podemos inferir que el campo eléctrico sólo depende de la coordenada radial r , y sólo apunta en la dirección radial \hat{r} , es decir, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ y $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi \hat{r}$. Entonces, usando la ley de Gauss con una superficie gaussiana esférica de radio r :

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r)\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi \hat{r} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \\ &\Rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora, para obtener la carga encerrada por nuestra superficie gaussiana esférica de radio r debemos integrar nuestra densidad de carga volumétrica, ya que por definición:

$$Q_{enc} = \int_{C_r} \rho dV$$

Donde C_r es la esfera de radio r . Entonces:

$$Q_{enc} = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Zq\alpha}{4\pi r^2}(1 - \alpha r)e^{-\alpha r} r^2 \sin(\theta)d\theta d\phi dr$$

Recordamos que integrar con respecto a ϕ nos da un factor 2π , mientras que la integral de $\sin(\theta)$ entre 0 y π nos da 2, entonces desarrollando:

$$\Rightarrow Q_{enc} = \frac{Zq\alpha}{4\pi} 4\pi \left[\int_0^r e^{-\alpha r} dr - \alpha \int_0^r r e^{-\alpha r} dr \right] \quad (9)$$

La primera integral se puede hacer directamente:

$$\int_0^r e^{-\alpha r} dr = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} \right]_0^r = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha}$$

La segunda integral la haremos con integración por partes usando:

$$u = r \Rightarrow du = dr \quad ; \quad dv = e^{-\alpha r} dr \Rightarrow v = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r}$$

Y entonces:

$$\int_0^r r e^{-\alpha r} dr = \left[-\frac{1}{\alpha} r e^{-\alpha r} \right]_0^r + \frac{1}{\alpha} \int_0^r e^{-\alpha r} dr = -\frac{1}{\alpha} r e^{-\alpha r} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2}$$

Entonces, reemplazando en la expresión (9), tendremos que:

$$\Rightarrow Q_{enc} = Zq\alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha} + r e^{-\alpha r} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r} - \frac{1}{\alpha} \right] \Rightarrow Q_{enc} = Zq\alpha r e^{-\alpha r}$$

Reemplazando en la expresión (8) y desarrollando:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r) &= \frac{Zq\alpha r e^{-\alpha r}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Zq\alpha r e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Zq\alpha e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{r}} \end{aligned}$$

Notemos que este gráfico diverge para $r \rightarrow 0$, y decae a cero cuando $r \rightarrow \infty$, al igual que el campo eléctrico de una carga puntual, sin embargo, al comparar cuantitativamente los módulos de ambos campos (E_a para el campo del átomo y E_p para el de la carga puntual) tendremos que:

$$\frac{E_a}{E_p} = \frac{\frac{Zq\alpha e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r}}{\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}} = \frac{\frac{Zq\alpha e^{-\alpha r}}{4\pi\epsilon_0 r}}{\frac{Zq}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \Rightarrow \frac{E_a}{E_p} = \frac{e^{-\alpha r}}{1/\alpha r}$$

Como $\frac{1}{\alpha r}$ es mayor que $e^{-\alpha r}$ en todo el dominio ($0 < r < \infty$), entonces notamos que el campo eléctrico de la carga puntual siempre es mayor que el del átomo con la misma carga. Con esta información ($E_a > E_p$, divergentes en cero y cero en el límite a infinito), podemos graficar ambos módulos en función de la distancia radial r :

