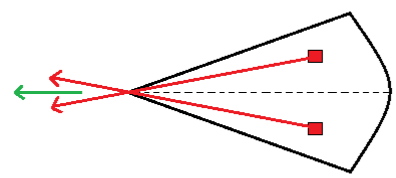
**FI2002-2** Electromagnetismo.
**Profesor:** Marcel Clerc.
**Auxiliares:** Guido Escudero, Roberto Gajardo.

# Pauta Auxiliar 2: Distribuciones continuas de carga.

07 de Abril de 2020

## P1. Campo eléctrico de una distribución de carga no uniforme:

a) Para acercarnos a lo que queremos interpretar, nos conviene primero comentar sobre el campo eléctrico en el origen. Tomando una de las secciones angulares, veamos que, por simetría, el campo eléctrico en ese plano debe apuntar en la dirección de la *punta* de nuestra sección angular, ya que la contribución lateral del campo eléctrico generado por cada diferencial de superficie se cancela con la contribución del diferencial de superficie opuesto, tal como se ilustra en el siguiente dibujo, donde la flecha verde indica la suma vectorial de ambas contribuciones individuales:



Entonces, como la sección angular que está en el eje $x$ apunta en $-\hat{x}$ y la sección angular que está en el eje $y$ apunta en $-\hat{y}$, tendremos que la dirección del campo eléctrico en el origen debe ser $-(\hat{x}+\hat{y})$. Ahora, si queremos el campo eléctrico en un punto *sobre* el origen, notemos que las contribuciones laterales seguirán cancelándose, mientras que habrá una componente vertical no nula, dado que ambas flechas (contribuciones) de cada diferencial apuntarán hacia arriba, es decir, se sumarán en vez de cancelarse, de esta forma el campo eléctrico en un punto sobre el origen tendrá una dirección $-(\hat{x}+\hat{y})+\hat{z}$.

b) Haremos uso del *principio de superposición*, el cual nos dice que el campo eléctrico generado por $N$ distribuciones es la suma de la contribución de cada distribución, por lo tanto, podemos calcular el campo eléctrico generado por cada una de las porciones angulares, y luego sumarlos.

Recordamos la definición de campo eléctrico para una densidad superficial de carga:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\sigma}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS$$

Donde $\vec{r}$ es el punto donde queremos encontrar el campo eléctrico, $\vec{r}'$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga, y $dS$ es el diferencial de superficie asociado a nuestra parametrización. En este caso, como queremos el campo a una altura $h$ por sobre el origen, tendremos que $\vec{r}=h\hat{z}$, mientras que, al estar nuestras porciones angulares en el plano $XY$, podemos usar coordenadas polares para parametrizarlas, es decir, $\vec{r}'=r\hat{r}$, donde $r$ y $\hat{r}$ son la coordenada radial y el vector unitario radial, respectivamente. Como trabajamos en coordenadas polares, tendremos que $dS = rdrd\theta$, donde $r\in[0,R]$ y $\theta\in\left[-\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$ para el sector que está en el eje $x$ y $\theta\in\left[\frac{\pi-\alpha}{2},\frac{\pi+\alpha}{2}\right]$ para el sector que está en el eje $y$. Partiremos calculando el campo generado por la sección que está en el eje $x$, entonces:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{(h\hat{z}-r\hat{r})\sigma_0 r^2}{R|h\hat{z}-r\hat{r}|^3}d\theta dr$$

Como $\hat{z}$ y $\hat{r}$ son vectores unitarios de la misma base (cilíndricas), podemos calcular el módulo directamente como la raíz cuadrada de la suma de las componentes al cuadrado, es decir:

$$|h\hat{z} - r\hat{r}| = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{E}_1(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{(h\hat{z} - r\hat{r})r^2}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr$$

$$\Rightarrow \ \vec{E}_1(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{hr^2\hat{z}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr - \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^3\hat{r}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr\right] \tag{1}$$

Desarrollemos la primera integral. Notemos que nada depende del ángulo $\theta$, por lo tanto podemos integrar en ese ángulo y obtendremos $\frac{\alpha}{2} - (-\frac{\alpha}{2}) = \alpha$, entonces:

$$I_1 = \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{hr^2\hat{z}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr = h\alpha\hat{z}\int_0^R \frac{r^2}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

Podemos resolver este tipo de integrales usando una sustitución hiperbólica del tipo $r = h\sinh(u)$, donde:

$$dr = h\cosh(u)du \quad ; \quad r = 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \quad ; \quad r = R \ \Rightarrow \ u = \sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{z}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \frac{h^2\sinh^2(u)}{h^3(1+\sinh^2(u))^{\frac{3}{2}}} h\cosh(u)du$$

Usamos la identidad hiperbólica $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$, entonces notamos que
$1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u)$, de esta forma:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{z}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \frac{h^2\sinh^2(u)}{h^3\cosh^3(u)} h\cosh(u)du = h\alpha\hat{z}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \tanh^2(u)du$$

Usando la identidad hiperbólica $\tanh^2(u) = 1 - \mathrm{sech}^2(u)$, entonces:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{z}\left[\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} du - \int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)} \mathrm{sech}^2(u)du\right]$$

Notamos que ambas integrales son directas (recordando que la integral de $\mathrm{sech}^2(u) = \tanh(u)$), entonces:

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{z}\left[\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - 0\right) - \left(\tanh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right) - \tanh(0)\right)\right]$$

$$\Rightarrow \ I_1 = h\alpha\hat{z}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{\sinh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right)}{\cosh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right)}\right]$$

Por definición de función inversa tendremos que $\sinh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right)\right) = \frac{R}{h}$, mientras que, por otro lado, es posible demostrar la siguiente propiedad:

$$\cosh\left(\sinh^{-1}(x)\right) = \sqrt{x^2+1}$$

Entonces, aplicando a nuestro resultado, tenemos finalmente que:

$$\Rightarrow\ I_1 = h\alpha\hat{z}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{\frac{R}{h}}{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}+1}}\right]\ \Rightarrow\ I_1 = h\alpha\hat{z}\left[\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right] \tag{2}$$

Ahora debemos calcular la segunda integral de la expresión (1), es decir:

$$I_2 = \int_0^R \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^3\hat{r}}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta dr$$

Dentro de la integral lo único que depende del ángulo es $\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$, entonces integramos:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \hat{r} d\theta = \hat{x}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos(\theta)d\theta + \hat{y}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \sin(\theta)d\theta$$

Como el seno es una función impar y se está integrando en un dominio par, entonces la integral asociada a $\sin(\theta)$ se anula. Entonces:

$$\Rightarrow\ \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \hat{r} d\theta = \hat{x}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \hat{x}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \hat{r} d\theta = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}$$

Entonces, reemplazando en la integral $I_2$:

$$\Rightarrow\ I_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}\int_0^R \frac{r^3}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} dr$$

Ahora, para resolver la integral con respecto a $r$ usaremos el cambio de variable $u = h^2 + r^2$, de tal forma que:

$$du = 2rdr\ \Rightarrow\ dr = \frac{du}{2r} \quad ; \quad r = 0\ \Rightarrow\ u = h^2 \quad ; \quad r = R\ \Rightarrow\ u = h^2 + R^2$$

Entonces:

$$\Rightarrow\ I_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}\int_{h^2}^{h^2+R^2} \frac{r^3}{u^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{2r}$$

Notamos que el $r$ del denominador se cancela con un $r$ del numerador, mientras que usando el cambio de variable sabemos que $r^2 = u - h^2$, entonces:

$$\Rightarrow\ I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}\int_{h^2}^{h^2+R^2} \frac{u-h^2}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

Separamos las integrales, y entonces:

$$\Rightarrow\ I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}\left[\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{u}{u^{\frac{3}{2}}}du - \int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{h^2}{u^{\frac{3}{2}}}du\right] \Rightarrow\ I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}\left[\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} - h^2\int_{h^2}^{h^2+R^2}\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Podemos integrar directamente estas expresiones, entonces:

$$\Rightarrow\ I_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{x}\left[2\left(\sqrt{R^2+h^2} - \sqrt{h^2}\right) + 2h^2\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)\right]$$

Como escogemos $h > 0$ entonces $\sqrt{h^2} = |h| = h$, entonces, desarrollando un poco la expresión anterior, llegaremos a:

$$\Rightarrow\ I_2 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)\hat{x} \tag{3}$$

Entonces, juntando las expresiones para $I_2$ e $I_2$ encontradas en (2) y (3), respectivamente, en la expresión para el campo eléctrico $\vec{E}_1$ encontrada en (1), tendremos que el campo eléctrico generado por la sección angular que está en el eje $x$ es:

$$\vec{E}_1(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)\hat{x} + h\alpha\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{z}\right] \tag{4}$$

Vemos que, efectivamente, la dirección es la discutida en la parte (a). Ahora, por simetría notemos que al calcular el campo eléctrico para la otra sección angular aparecerán las mismas integrales, y lo único que cambiará será la dirección en la cual apunte el campo eléctrico, dado que ahora integraríamos entre $\frac{\pi-\alpha}{2}$ y $\frac{\pi+\alpha}{2}$ el vector $\hat{r}$, es decir:

$$\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{r}d\theta = \hat{x}\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\cos(\theta)d\theta + \hat{y}\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\sin(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\ \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{r}d\theta = \hat{x}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \hat{y}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{r}d\theta = \hat{x}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right) + \hat{y}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}}\hat{r}d\theta = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{y}$$

Entonces, podemos concluir que:

$$\vec{E}_2(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)\hat{y} + h\alpha\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{z}\right] \tag{5}$$

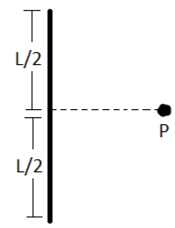
Entonces, sumando los resultado encontrado en las expresiones (4) y (5), tendremos que el campo eléctrico total generado por nuestra distribución de carga a una altura $h$ del origen es:

$$\boxed{\vec{E}(h) = \frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{R^2+h^2}{\sqrt{R^2+h^2}} - 2h\right)(\hat{x}+\hat{y}) + 2h\alpha\left(\sinh^{-1}\left(\frac{R}{h}\right) - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)\hat{z}\right]}$$

Notemos que en el caso $h = 0$ el campo eléctrico sólo posee dirección $-(\hat{x}+\hat{y})$, es decir, tiene dirección planar, lo cual tiene sentido y concuerda con lo discutido en la parte (a).

**P2. Campo eléctrico de un alambre finito:**

a) El sistema de nuestra pregunta es algo así:




Para una densidad de carga lineal, el campo eléctrico está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r'})\lambda}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dl$$

Donde $\vec{r}$ es el punto donde queremos encontrar el campo eléctrico, $\vec{r'}$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga, y $dl$ es el diferencial de línea asociado a nuestra parametrización. En este caso, como queremos el campo eléctrico en algún punto arbitrario del plano $XY$, podemos decir que $\vec{r} = r\hat{r}$ en coordenadas polares (donde implícitamente estarán $x$ e $y$), por otro lado, notemos que $\vec{r'} = z\hat{z}$, con $z \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, puesto que estamos recorriendo una línea que está justo en el eje $z$. Finalmente, notemos que $dl = dz$, ya que es el diferencial que está asociado a nuestra parametrización. De esta forma, tendremos que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(r\hat{r}-z\hat{z})\lambda}{|r\hat{r}-z\hat{z}|^3}dz$$

Como $\hat{z}$ y $\hat{r}$ son vectores unitarios de la misma base (cilíndricas), podemos calcular el módulo directamente como la raíz cuadrada de la suma de las componentes al cuadrado, es decir:

$$|h\hat{z}-r\hat{r}| = \sqrt{h^2+r^2}$$

Reemplazando y reordenando, tendremos:

$$\Rightarrow\ \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(r\hat{r}-z\hat{z})}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz$$

$$\Rightarrow\ \vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{r\hat{r}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z\hat{z}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz\right]$$

Notemos que estamos integrando con respecto a $z$ en un intervalo simétrico. La integral asociada a $z\hat{z}$ es la integral de una función impar en un dominio simétrico, entonces tendremos que:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{z\hat{z}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dz = 0$$

Por otro lado, la integral asociada a $r\hat{r}$ es una integral de una función par asociada a un dominio simétrico, por lo tanto podemos integral entre 0 y $\frac{L}{2}$ multiplicando la integral por dos, de esta forma:

$$\Rightarrow\ \vec{E} = \frac{2\lambda r\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dz}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para resolver esta integral usamos un cambio de variable hiperbólico $z = r\sinh(u)$, donde:

$$dz = r\cosh(u)du \quad ; \quad z = 0 \Rightarrow u = 0 \quad ; \quad z = \frac{L}{2} \Rightarrow u = \sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda r\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)} \frac{r\cosh(u)}{r^3\cosh^3(u)}du$$

Donde el desarrollo para llegar a ese denominador puede verse en la pregunta anterior. Desarrollamos:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)} \frac{du}{\cosh^2(u)} = \frac{\lambda\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}\left[\tanh(u)\right]\Big|_0^{\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)}$$

Recordamos que:

$$\tanh(0) = 0 \quad ; \quad \tanh\left(\sinh^{-1}\left(\frac{L}{2r}\right)\right) = \frac{L}{\sqrt{L^2+4r^2}}$$

Entonces, reemplazando, tendremos que el campo eléctrico generado por este alambre finito en el plano $XY$ es:

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda L\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{L^2+4r^2}}$$

Recordando que $r = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces obtenemos el campo eléctrico en la posición $(x, y)$:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(x,y) = \frac{\lambda L\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{L^2+4(x^2+y^2)}}}$$

b) Recordamos la expresión que obtuvimos con la coordenada $r$:

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda L\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{L^2+4r^2}}$$

Si $r >> L$ entonces $4r^2 >> L^2$, de esta forma podemos ignorar el término $L^2$ dentro de la raíz, de tal forma que:

$$\Rightarrow \vec{E}(r) \approx \frac{\lambda L\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{4r^2}} = \frac{\lambda L\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Por último, la carga total de nuestra línea será $Q = \lambda L$, dado la definición de densidad lineal de carga, entonces:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) \approx \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

Notamos entonces que recuperamos el campo eléctrico para una carga puntual, lo cual tiene sentido si pensamos que al movernos muy lejos de nuestra línea finita, esta se verá como una carga puntual (su largo será despreciable).

**P3. Planos infinitos:**

Aprovecharemos el principio de superposición, es decir, vamos a calcular el campo eléctrico generado por cada uno de los planos, y luego sumaremos sus contribuciones para encontrar el campo eléctrico total.

Partiremos con el plano que es paralelo al plano $XY$. Existen diversas formas de calcular el campo eléctrico de un plano infinito, acá discutiremos dos:

I) **Por integración directa**:

Por definición de campo eléctrico, para una distribución superficial de carga $\sigma$ tendremos que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r}-\vec{r}')\sigma}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dS \tag{6}$$

Donde $\vec{r}$ es el punto donde queremos encontrar el campo eléctrico, $\vec{r}'$ es el vector que parametriza nuestra distribución de carga (es decir, el vector que recorre nuestra distribución), $\sigma$ es la densidad superficial de carga, y $dS$ es el diferencial de superficie de nuestra distribución. A pesar de que podemos hacer este ejercicio usando $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ en coordenadas cartesianas, las integrales involucradas se vuelven más manejables si usamos coordenadas polares.

Primero, notemos que por simetría el campo eléctrico NO puede depender de las coordenadas $x$ o $y$, ya que donde sea que nos paremos en este plano infinito estaremos viendo la misma imagen hacia cualquier lado, entonces, podría depender a lo más de la altura medida desde el plano, entonces tendremos que $\vec{r} = z\hat{z}$. Por otro lado, notemos que como el plano es paralelo al plano $XY$ podemos usar la coordenada polar $r$ para recorrerlo completamente, entonces, $\vec{r}' = r\hat{r}$ y $dS = rdrd\theta$, donde $r \in [0,\infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Entonces, reemplazando en la expresión (6) para el campo eléctrico, tendremos que:

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{(z\hat{z}-r\hat{r})}{|z\hat{z}-r\hat{r}|^3}\sigma r d\theta dr$$

Recordamos que $\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$, entonces:

$$|z\hat{z}-r\hat{r}| = |z\hat{z} - r\cos(\theta)\hat{x} - r\sin(\theta)\hat{y}| = \sqrt{z^2 + r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow\ |z\hat{z}-r\hat{r}| = \sqrt{z^2+r^2}$$

Entonces:

$$\Rightarrow\ \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} rdrd\theta - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\hat{r}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} rdrd\theta\right]$$

Notemos que la segunda integral se anula en virtud de que:

$$\int_0^{2\pi} \hat{r}d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)d\theta\hat{x} + \int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta\hat{x} = 0$$

Ya que las funciones trigonométricas tienen período $2\pi$. Entonces:

$$\Rightarrow\ \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z}}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} rdrd\theta$$

Integramos con respecto al ángulo y sacamos de la integral el término $z\hat{z}$, ya que es una constante con respecto a la variable de integración $r$, entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{2\pi\sigma z\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr \tag{7}$$

Podemos resolver esta integral usando el cambio de variable $u = z^2 + r^2$, con lo cual:

$$du = 2rdr \;\Rightarrow\; dr = \frac{du}{2r}$$

$$r = 0 \;\Rightarrow\; u = z^2 \quad ; \quad r \to \infty \;\Rightarrow\; u \to \infty$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_{z^2}^\infty \frac{r}{2ru^{\frac{3}{2}}}du = \frac{\sigma z\hat{z}}{4\varepsilon_0}\int_{z^2}^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{z}}{4\varepsilon_0}\left(-2\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\Bigg|_{z^2}^\infty = -\frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\left(\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$

Vemos que el límite se anula, mientras que usamos que $\sqrt{z^2} = |z|$, entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0|z|}\hat{z}$$

Podemos notar que el término $\frac{z}{|z|}$ es simplemente el signo de la coordenada $z$, lo cual nos dice que el campo eléctrico siempre sale del plano infinito (ya que $\sigma$ es positivo), entonces será positivo en las alturas positivas, y negativo en alturas negativas, así:

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & ; \quad z \geq 0 \\ \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & ; \quad z \leq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Es interesante notar que el campo eléctrico que genera el campo infinito es constante (no depende de la posición), lo cual tiene sentido si pensamos que, al alejarnos, sólo estamos encontrando más puntos del plano en el horizonte, con lo cual jamás dejamos de ver el plano infinito como tal.

II) **Usando el campo eléctrico de un anillo**:

En la clase auxiliar anterior se llegó al siguiente resultado para el campo eléctrico generado por un anillo de radio $R$ y densidad lineal de carga $\lambda$ en una altura $z$:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

Notemos que al sumar infinitos anillos infinitesimales con radios desde $r = 0$ hasta $r \to \infty$ estaremos construyendo un plano infinito (con la misma estrategia, pero integrando hasta $r = R$ se puede encontrar el campo eléctrico de un disco de radio $R$). Si usamos $R = r$ (ahora variable) y usamos que la carga $q$ del anillo es simplemente $\lambda$ por el perímetro, es decir, $q = 2\pi r\lambda$, entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{2\pi r\lambda z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \;\Rightarrow\; \vec{E}(z) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

Si tomamos un pequeño diferencial de carga, tendremos que:

$$d\vec{E} = \frac{zdq}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$$

Donde ahora tomamos $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\theta$, entonces:

$$\Rightarrow \; d\vec{E} = \frac{\sigma z\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta$$

Integramos para obtener el campo eléctrico:

$$\Rightarrow \; \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{z}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta dr$$

Integramos en el ángulo, y entonces tendremos que:

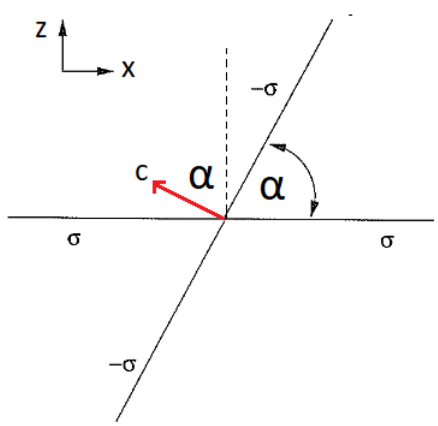
$$\Rightarrow \; \vec{E}(z) = \frac{\sigma z\hat{z}}{2\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{r}{(z^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr$$

Notamos que obtenemos la misma integral que en (7), por lo tanto, el desarrollo de acá en adelante es análogo a lo que hicimos anteriormente.

Con lo demostrado anteriormente (campo eléctrico de un plano infinito es constante), tendremos que el módulo de los campos eléctricos es:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad E_2 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

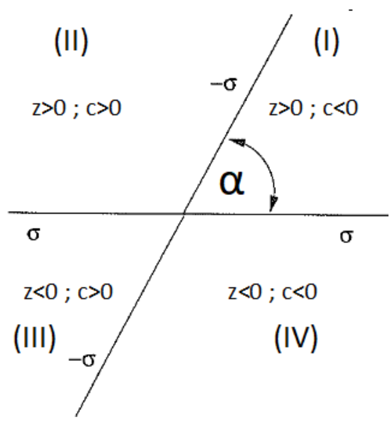
Donde el subíndice 1 hace referencia al plano paralelo a $XY$, y el subíndice 2 hace referencia al plano inclinado en un ángulo $\alpha$ (el cual es negativo porque la densidad es $-\sigma$). Ahora, la dirección del campo de cada plano es perpendicular al plano correspondiente, por lo tanto está claro que para el plano 1 la dirección es $\pm\hat{z}$ dependiendo en qué cuadrante nos encontremos, mientras que para el plano 2 debemos encontrar el vector normal con geometría:




Notamos que:

$$\hat{c} = -\sin(\alpha)\hat{x} + \cos(\alpha)\hat{z}$$

Entonces, $\pm\hat{c}$ será la dirección del campo eléctrico $\vec{E}_2$. Ahora, notemos que por la naturaleza de la dirección de los campos tendremos combinaciones distintas en los signos de $\hat{z}$ y $\hat{c}$ cuando estemos en distintas zonas del sistema, tal como se ilustra en la siguiente imagen:




Entonces, calculemos los campos en cada caso. En el cuadrante (I):

$$\vec{E}_I = E_1\hat{z} + E_2(-\hat{c}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{z}+\hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_I = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) \tag{9}$$

Para el cuadrante (II):

$$\vec{E}_{II} = E_1\hat{z} + E_2\hat{c} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\hat{z}-\hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_{II} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1-\cos(\alpha))\hat{z}) \tag{10}$$

Para el cuadrante (III):

$$\vec{E}_{III} = E_1(-\hat{z}) + E_2\hat{c} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}-\hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_{III} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) \tag{11}$$

Por último, para el cuadrante (IV):

$$\vec{E}_{IV} = E_1(-\hat{z}) + E_2(-\hat{c}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}+\hat{c}) \;\Rightarrow\; \vec{E}_{IV} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1-\cos(\alpha))\hat{z}) \tag{12}$$

Entonces, resumiendo tendremos que:

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z>0\ ,\ c<0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1-\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z>0\ ,\ c>0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\sin(\alpha)\hat{x} + (1+\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z<0\ ,\ c>0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sin(\alpha)\hat{x} + (1-\cos(\alpha))\hat{z}) & ; \quad z<0\ ,\ c<0 \end{cases}}$$