Aux 20: Sólido rígido
Parte 3

- Repaso

Matriz de inercia: → Nos dice cuanto momento angular "gana" un cuerpo debido a rotaciones en torno a ciertos ejes gracias a su geometría

→ Es aditiva y simétrica

→ Se calcula, por lo general, desde el cuerpo rígido mismo así que casi siempre es invariante del tiempo

Discreto:
$$I_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(r_a^2 \delta_{ij} - r_i r_j \right)$$

$i, j = \{x, y, z\}$ sistema cartesiano sobre el cual se calcula la inercia.

OJO: La aditividad de inercias es siempre y cuando se ocupe el mismo sistema coordenado.

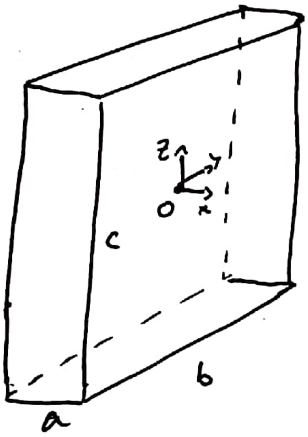
Teo de Steiner: → Nos dice que la inercia en un punto O' se puede calcular a partir de la inercia calculada en un punto O (que por lo general es más sencillo)

$$I_{ij}^{O'} = I_{ij}^{O} + M \left(R^2 \delta_{ij} - R_i R_j \right)$$

Con $\vec{R}$ vector que apunta de O' a O

P1] Tenemos un sólido homogéneo de masa M con forma de paralelepípedo de dimensiones (a, b, c) con $a<b<c$

a) Calcular la matriz de inercia respecto al centro de masas.



- Usamos la fórmula para la matriz de inercia para un medio continuo:

$$I_{ij} = \int (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\, dm$$

$\vec{r}$: Punto arbitrario que recorrerá todo el sólido

dm: Elemento de masa, en este caso:

$$dm = \rho\, dV$$

ρ: densidad volumétrica: $\rho = \dfrac{M}{abc}$

dV: Elemento de volumen: $dV = dx\,dy\,dz$ en este sistema coordenado

- De acuerdo al origen que escogimos $\vec{r}$ será:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \qquad \text{con} \quad x \in [-a/2, a/2] \quad z \in [-c/2, c/2]$$
$$\Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad\qquad y \in [-b/2, b/2]$$

- Calculamos la inercia por componentes.

$$I_{xx} = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} \left[(\cancel{x^2} + y^2 + z^2)\cancel{\delta_{xx}}^{\,1} - \cancel{x \cdot x} \right] \rho\, dx\,dy\,dz = \rho \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$= \rho \left[\int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dx + \int_{-c/2}^{c/2} z^2 dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dx \right]$$

$$= \rho \left[c \cdot \frac{b^3}{12} \cdot a + \frac{c^3}{12} \cdot b \cdot a \right] = \frac{M}{abc} \cdot \frac{1}{12} \left(\cancel{a}b^{\cancel{3}\,2}\cancel{c} + \cancel{ab}c^{\cancel{3}\,2} \right) = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

- Para I_{yy} I_{zz} los cálculos son muy parecidos:

$$I_{yy} = \frac{M}{12}(a^2+c^2) \quad , \quad I_{zz} = \frac{M}{12}(a^2+b^2)$$

- Veamos que ocurre para los elementos fuera de la diagonal (Aunque por simetría deben ser cero)

$$I_{xy} = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (r^2 \cancel{\delta_{xy}}^{0} - xy)\,\rho\, dx\,dy\,dz$$

$$= -\rho \int_{-\frac{c}{2}}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} y\,dy \int_{-\frac{a}{2}}^{a/2} x\,dx$$

$$= 0$$

Pero las integrales de la forma $\int_{-a}^{a} x\,dx$ son cero ya que es integrar una fn. impar en un dominio simétrico

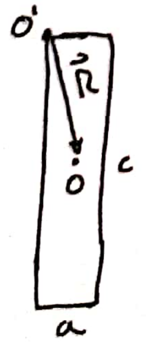
$$\Rightarrow I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

- La matriz de inercia queda:

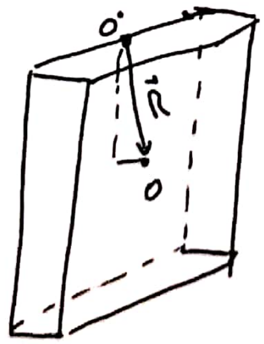
$$I = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

b) Vamos a calcular la inercia desde el centro de su arista intermedia con el teo de steiner

- Vista de lado



- Perspectiva



$$\vec{R} = \frac{a}{2}\hat{x} - \frac{c}{2}\hat{z}$$

- Calcularemos los elementos de

$$J_{ij} = M(R^2\delta_{ij} - R_i R_j)$$

$$J_{xx} = M\left(\left(\cancel{\left(\tfrac{a}{2}\right)^2} + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2\right)\delta_{xx} - \cancel{\left(\tfrac{a}{2}\right)\left(\tfrac{a}{2}\right)}\right) = \frac{Mc^2}{4}$$

$$J_{yy} = M\left[\left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{c}{2}\right)^2 - 0\right] = \frac{M}{4}(a^2 + c^2)$$

$$J_{zz} = \frac{Ma^2}{4}$$

- Como $R_y = 0 \Rightarrow J_{xy} = J_{yz} = 0$ pero J_{xz} no se anula

$$J_{xz} = M\left(\cancel{R^2\delta_{xz}}^{\,0} - \left(\tfrac{a}{2}\right)\left(-\tfrac{c}{2}\right)\right) = \frac{Mac}{4}$$

- En forma matricial sería:

$$J = \frac{M}{4}\begin{pmatrix} c^2 & 0 & ac \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ ac & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

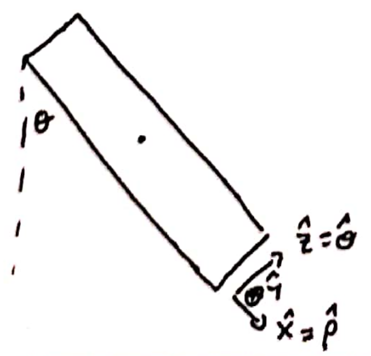
- Luego aplicar el teo de Steiner es sumar las matrices

$$I' = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} + \frac{M}{4}\begin{pmatrix} c^2 & 0 & ac \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ ac & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{M}{12}\begin{pmatrix} b^2+4c^2 & 0 & 3ac \\ 0 & 4(a^2+c^2) & 0 \\ 3ac & 0 & 4a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

c) Calcular la frecuencia de pequeñas oscilaciones para una oscilación en torno al eje $\hat{y}$ debido a la gravedad

- Vista de lado



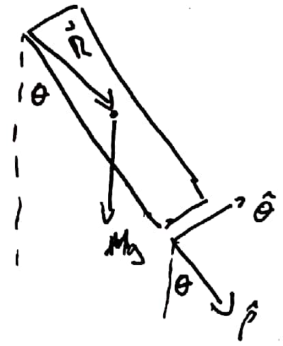
- En este movimiento los ejes $\hat{x}$ y $\hat{z}$ que definimos antes se comportan como $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ de un sistema polar

Scanned with CamScanner

- Si solo hay rotación en torno al eje $\hat{y}$, o sea, $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$ el momento angular será:

$$\vec{L} = I'_{yy}\dot{\theta}\hat{y} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = I'_{yy}\ddot{\theta}\hat{y} = \frac{M(a^2+c^2)}{3}\ddot{\theta}\hat{y}$$

- Veamos ahora el torque del peso (que se aplica sobre el centro de masas)



$$\vec{F} = Mg(\cos\theta\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$$

$$\vec{R} = \frac{c}{2}\hat{\rho} + \frac{a}{2}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \left(\frac{c}{2}\hat{\rho} + \frac{a}{2}\hat{\theta}\right) \times Mg(\cos\theta\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta})$$

$$= Mg\left(-\frac{c}{2}\operatorname{sen}\theta\,\underbrace{\hat{\rho}\times\hat{\theta}}_{\hat{y}} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\underbrace{\hat{\theta}\times\hat{\rho}}_{-\hat{y}}\right)$$

$$= -Mg\left(\frac{c}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{a}{2}\cos\theta\right)\hat{y}$$

- La ecuación del torque nos dice que $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

$$\Rightarrow \frac{M(a^2+c^2)}{3}\ddot{\theta} = -Mg\left(\frac{c}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{a}{2}\cos\theta\right)$$

$$\ddot{\theta} + g\left(\frac{c}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{a}{2}\cos\theta\right) = 0$$

Si $\theta \ll 1$
$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \theta$
$\cos\theta = 1$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+c^2)}{3}\ddot{\theta} + \frac{gc}{2}\theta + \frac{ga}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a^2+c^2)}{3}\ddot{\theta} + \frac{gc}{2}\left(\theta + \frac{a}{c}\right) = 0$$

Hacemos un cambio de variables $\tilde{\theta} = \theta + a/c$
$\Rightarrow \ddot{\tilde{\theta}} = \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{\theta}} + \frac{g c/2}{\frac{(a^2+c^2)}{3}}\tilde{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_b^2 = \frac{3gc}{2(a^2+c^2)}}$$