

Aux 19: Sólido rígido

• Ahora trabajamos con sistemas de muchas partículas.

• Matriz de inercia:

Discretos:

$$I_{is} = \sum_{a=1}^N m_a (r_a^2 \delta_{is} - r_{ai} r_{as})$$

masa de la partícula "a"
 Módulo de la posición de la partícula "a"
 Coordenada "i" o "s" de la posición de la partícula "a"

Continuo

$$I_{is} = \int (r^2 \delta_{is} - r_i r_s) dm.$$

Posición de punto arbitrario dentro de la masa en la cual se integra.

Densidad de masa

$$dm = \begin{cases} \lambda dl \\ \sigma ds \\ \rho dv \end{cases}$$

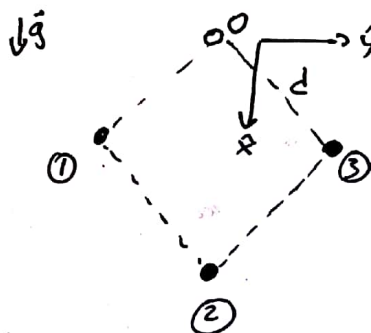
• Con la matriz de inercia podemos escribir el momento angular que rota

$$\Rightarrow \vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

• Con esto, como por lo general la matriz de inercia no cambia la ec de torque será:

$$\vec{\tau} = \mathbf{I} \dot{\vec{\omega}}$$

P1] Tenemos un alambre con 3 masas en sus vértices y cuelga del
 resorte



a) Calcular el tensor de inercia respecto a O.

• Usaremos la fórmula

$$I_{ij} = \sum_{a=1}^3 m_a (r_a^2 \delta_{ij} - r_{ai} r_{aj})$$

• Donde en este caso

$$\vec{r}_1 = \frac{\sqrt{2}d}{2} (\hat{x} - \hat{y}), \quad r_1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}d}{2}\right)^2 \cdot 2 = d^2, \quad r_{1x} = \frac{\sqrt{2}d}{2}, \quad r_{1y} = -\frac{\sqrt{2}d}{2}, \quad r_{1z} = 0$$

$$\vec{r}_2 = \sqrt{2}d \hat{x}, \quad r_2^2 = 2d^2, \quad r_{2x} = \sqrt{2}d, \quad r_{2y} = 0, \quad r_{2z} = 0$$

$$\vec{r}_3 = \frac{\sqrt{2}d}{2} (\hat{x} + \hat{y}), \quad r_3^2 = d^2, \quad r_{3x} = \frac{\sqrt{2}d}{2}, \quad r_{3y} = \frac{\sqrt{2}d}{2}, \quad r_{3z} = 0$$

• Calculamos por componentes

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum m_a (r_a^2 \delta_{xx} - r_{ax} r_{ax}) \\ &= m \left(d^2 - \left(\frac{\sqrt{2}d}{2}\right)^2 \right) + m \left(2d^2 - (\sqrt{2}d)^2 \right) + m \left(d^2 - \left(\frac{\sqrt{2}d}{2}\right)^2 \right) \\ &= md^2 \end{aligned}$$

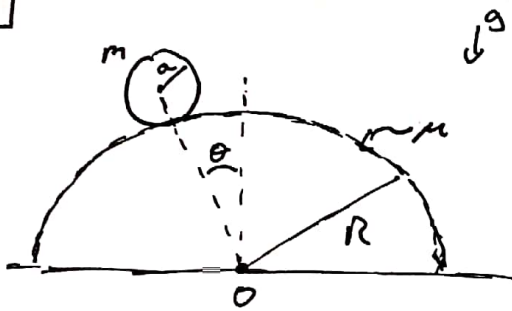
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum m_a (r_a^2 \delta_{xy} - r_{ax} r_{ay}) \\ &= -m \left(\frac{\sqrt{2}d}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}d}{2} \right) - m (\sqrt{2}d) \cdot 0 - m \left(\frac{\sqrt{2}d}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}d}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Es directo concluir
 que $I_{xz} = I_{yz} = 0$
 ya que $r_{az} = 0 \forall a$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= m \left(d^2 - \left(\frac{\sqrt{2}d}{2}\right)^2 \right) + m (2d^2 - 0^2) + m \left(d^2 - \left(\frac{\sqrt{2}d}{2}\right)^2 \right) \\ &= 4md^2 \end{aligned}$$

$$I_{zz} = m(d^2 - 0) + m(2d^2 - 0) + m(d^2 - 0) = 4d^2m$$

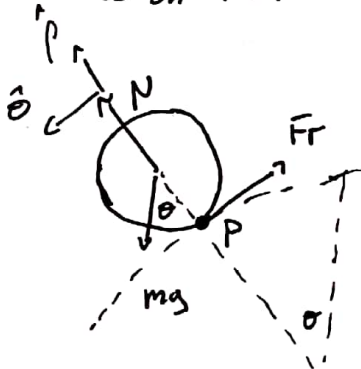
P₂



a) Escribir las ecuaciones de movimiento para el sistema

• Necesitamos escribir la 2^{da} ley de Newton para el centro de masas del disco y la ecuación de torques.

• Hacemos un DCL



-> En polares: $\vec{r}_{cm} = (R+a) \hat{p}$, $\dot{\vec{r}}_{cm} = (R+a) \dot{\theta} \hat{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{r}}_{cm} = -(R+a) \dot{\theta}^2 \hat{p} + (R+a) \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\rightarrow \sum \vec{F} = N \hat{p} - F_r \hat{\theta} + mg(-\cos\theta \hat{p} + \sin\theta \hat{\theta})$$

-> $\vec{F} = m\ddot{a}$ por componentes:

$$\hat{p} \mid -m(R+a) \dot{\theta}^2 = -mg \cos\theta + N \quad (i)$$

$$\hat{\theta} \mid m(R+a) \ddot{\theta} = mg \sin\theta - F_r \quad (ii)$$

-> Torque con respecto al centro de masas:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_p \times \vec{F}_r \quad ; \quad \vec{r}_p: \text{posición del punto } p \text{ (contacto entre el disco y el cilindro) desde el centro de masas}$$

$$= (-a \hat{p}) \times (-F_r \hat{\theta})$$

$$= a F_r (\hat{p} \times \hat{\theta}) \Rightarrow \vec{\tau} = a F_r \hat{z}$$

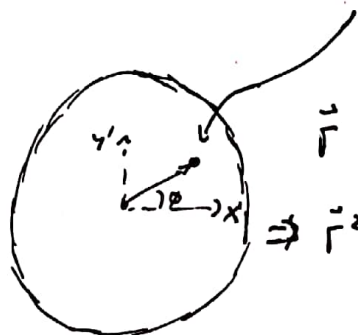
-> Si el disco solo gira en torno al eje $\hat{z}$ entonces $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ (rotación en torno a su eje interno)

$$\Rightarrow \vec{l} = I \vec{\omega} = I_{zz} \omega \hat{z}$$

Acá asumimos que c/r al centro de masas la matriz de inercia es diagonal (Hay que probarlo!!)

De la fórmula de matriz de inercia

$$I_{is} = \int (r^2 \delta_{is} - r_i r_s) dm$$



$$\vec{r} = r \cos \phi \hat{x} + r \sin \phi \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{r}^2 = r^2$$

Donde

$\vec{r}$: posición de algún punto del disco

$$= \tau ds$$

$$= \tau r d\phi dr$$

$$\tau = \frac{m}{\pi a^2}$$

con $r \in [0, a]$, $\phi \in [0, 2\pi]$

Nos interesa I_{zz}

$$I_{zz} = \int_0^a \int_0^{2\pi} (r^2 \delta_{zz} - 0) \tau r d\phi dr = \tau \int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 d\phi dr$$

$$= \tau \cdot 2\pi \int_0^a r^3 dr = \tau \cdot 2\pi \frac{a^4}{4}$$

$$= \frac{m}{\pi a^2} \cdot 2\pi \frac{a^4}{4} \Rightarrow \boxed{I_{zz} = \frac{ma^2}{2}}$$

La ec de torque: $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ queda:

$$\boxed{a F_r = \frac{ma^2}{2} \dot{\omega}}$$

b) Relacionar la rotación del disco con $\dot{\theta}$

Tenemos que imponer la condición de no resbalar para el punto P: $\vec{v}_P = 0$

$$\Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P \quad \left| \begin{array}{l} \vec{v}_{cm} = \text{vel traslacional} \\ \vec{\omega} \times \vec{r}_P = \text{vel rotacional} \end{array} \right.$$

$$= (R+a) \dot{\theta} \hat{\theta} + \omega \hat{k} \times (-a \hat{r})$$

$$= (R+a) \dot{\theta} \hat{\theta} - \omega a \hat{\theta} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{(R+a)}{a} \dot{\theta}}$$

c) Encontrar el ángulo crítico θ_c en que el disco resbala

• De la ecuación de torques

$$F_r = \frac{m a}{2} \ddot{\omega} = \frac{m a}{2} \cdot \frac{(R+a)}{a} \ddot{\theta} = \frac{m}{2} (R+a) \ddot{\theta} \quad (*)$$

• Reemplazamos en (ii)

$$\Rightarrow m(R+a) \ddot{\theta} = mg \sin \theta - \frac{m}{2} (R+a) \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} (R+a) \ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (**); \text{ Usamos el truco } \ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} (R+a) \dot{\theta} d\dot{\theta} = g \sin \theta d\theta \quad \Bigg/ \int_0^{\dot{\theta}} \cdot \int_0^{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} (R+a) \frac{\dot{\theta}^2}{2} = g (1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} \frac{g}{(R+a)} (1 - \cos \theta)$$

• Reemplazamos en (i) y calculamos N .

$$N = mg \cos \theta - m(R+a) \dot{\theta}^2$$

$$= mg \cos \theta - m(R+a) \frac{4}{3} \frac{g}{(R+a)} (1 - \cos \theta)$$

$$= mg \left(\cos \theta - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cos \theta \right) \Rightarrow \boxed{N = mg \left(\frac{7 \cos \theta - 4}{3} \right)}$$

• Si sumamos (i) y (ii)

$$(**) \Rightarrow \dot{\theta} = Fr \cdot \frac{2}{m(R+a)}, \quad (**) \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{(R+a)} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Fr = \frac{1}{3} mg \sin \theta}$$

• La condición para que resbale: $F_r = \mu N$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \text{mg} \sin \theta_c = \mu \text{mg} \left(\frac{7 \cos \theta_c - 4}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \theta_c = \mu (7 \cos \theta_c - 4)} \quad 4$$