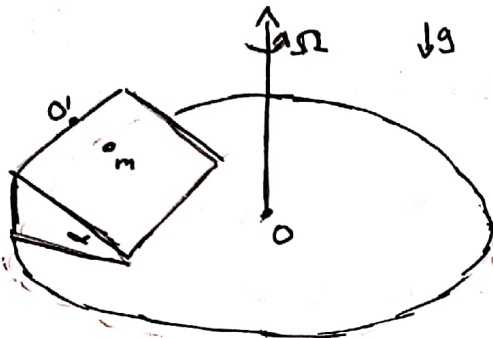


Aux 17: Sist de rcf no inerciales

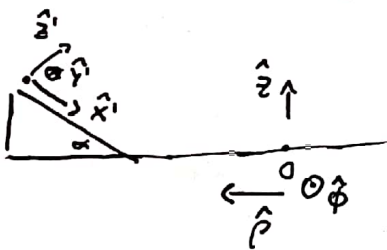


Dato: Podemos despreciar las pseudo fuerzas Salvo la fza de Coriolis

a) Encontrar la ecuación de Movimiento para m.

I) Nuestro origen fijo (inercial) será O y el móvil (no inercial) O'

II) El sistema O será polar mientras que O' será cartesiano



Como O' es cartesiano (y se mueve solo en la cuna):

$$\vec{r}' = x' \hat{x}' + y' \hat{y}'$$

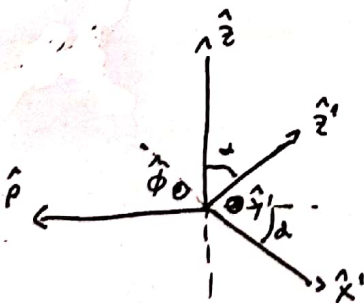
$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}'$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}' \hat{x}' + \ddot{y}' \hat{y}'$$

III) I dentifi canos $\vec{\Omega}$ ($\vec{\Omega}$ no lo necesitaremos ya que despreciaremos esa fuerza)

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$$

IV) Vamos a pasar los vectores unitarios $\{\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$ a escribirlos en la base $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$



$$\hat{r} = -(\cos \alpha \hat{x}' + \sin \alpha \hat{z}')$$

$$\hat{z} = -\sin \alpha \hat{x}' + \cos \alpha \hat{z}'$$

$$\hat{\phi} = -\hat{y}'$$

V) Escribimos la fuerza de Coriolis

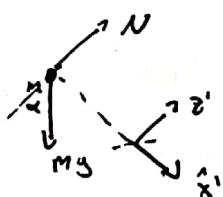
$$2m \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' = 2m \Omega \hat{z} \times (\dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}')$$

$$= 2m \Omega (-\sin \alpha \hat{x}' + \cos \alpha \hat{z}') \times (\dot{x}' \hat{x}' + \dot{y}' \hat{y}')$$

$$= 2m \Omega \left[-\dot{x}' \sin \alpha (\hat{z}' \times \hat{x}') + \dot{x}' \cos \alpha (\hat{z}' \times \hat{x}') - \dot{y}' \sin \alpha (\hat{z}' \times \hat{y}') + \dot{y}' \cos \alpha (\hat{z}' \times \hat{y}') \right]$$

$$= 2m \Omega (-\dot{y}' \cos \alpha \hat{x}' + \dot{x}' \cos \alpha \hat{y}' - \dot{y}' \sin \alpha \hat{z}')$$

VI) Vemos las fuerzas:



$$\sum \vec{F} = N \hat{z}' - mg \hat{z}$$

$$= N \hat{z}' - mg (-\sin \alpha \hat{x}' + \cos \alpha \hat{z}')$$

VII) Escribimos la ec de Movimiento:

• Escribimos $m \ddot{\vec{a}}' = \vec{F} - 2m \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'$

$$\Rightarrow m (\ddot{x}' \hat{x}' + \ddot{y}' \hat{y}') = N \hat{z}' - mg (-\sin \alpha \hat{x}' + \cos \alpha \hat{z}') -$$

$$- 2m \Omega (-\dot{y}' \cos \alpha \hat{x}' + \dot{x}' \cos \alpha \hat{y}' - \dot{y}' \sin \alpha \hat{z}')$$

VIII) Separamos por componentes:

$$\hat{x}'] \quad m \ddot{x}' = mg \sin \alpha + 2m \Omega \dot{y}' \cos \alpha \quad (I)$$

$$\hat{y}'] \quad m \ddot{y}' = -2m \Omega \dot{x}' \cos \alpha \quad (II)$$

$$\hat{z}'] \quad 0 = N - mg \cos \alpha + 2m \Omega \dot{y}' \sin \alpha \quad (III)$$

b) Encontrar $x'(t)$ e $y'(t)$ usando la indicación:

Indicación: la EDO: $\ddot{u} = A - \omega_0^2 u$, con A y ω_0^2 constantes tiene la siguiente solución:

$$u(t) = \frac{A}{\omega_0^2} + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3$$

Con C_1, C_2, C_3
Constantes de
integración

• Derivamos la ec (1)

$$(1) \Rightarrow \ddot{x}' = 2R \cos \alpha \ddot{y}' \quad | \text{ Reemplazamos } \ddot{y}' \text{ de (11)}$$

$$= 2R \cos \alpha (-2R \cos \alpha \ddot{x}')$$

$$\Rightarrow \ddot{x}' = -4R^2 \cos^2 \alpha \ddot{x}' \quad (*)$$

• Usamos la indicación para resolver (*) con $A = 0$ y $\omega_0^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha$

$$x(t) = C_1 \cos(2R \cos \alpha t) + C_2 \sin(2R \cos \alpha t) + C_3$$

• Si imponemos que la masa parte del reposo $\dot{x}(0) = \dot{x}'(0) = y(0) = \dot{y}'(0) = 0$

$$\rightarrow x'(0) = C_1 + C_3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 = -C_3$$

$$\rightarrow \ddot{x}'(0) = -C_1 \cdot 2R \cos \alpha \sin(2R \cos \alpha \cdot 0) + C_2 \cdot 2R \cos \alpha \cos(2R \cos \alpha \cdot 0)$$

$$= C_2 \cdot 2R \cos \alpha \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$\rightarrow$ De (1) tenemos

$$\ddot{x}'(0) = g \sin \alpha + 2R \ddot{y}'(0) \cos \alpha \Rightarrow \ddot{x}'(0) = g \sin \alpha$$

$$\rightarrow \ddot{x}'(0) = -C_1 (2R \cos \alpha)^2 \cos(2R \cos \alpha \cdot 0) - C_2 (2R \cos \alpha)^2 \sin(2R \cos \alpha \cdot 0)$$

$$= -C_1 (2R \cos \alpha)^2 \stackrel{!}{=} g \sin \alpha \Rightarrow C_1 = \frac{-g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)^2}$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'(t) = \frac{g \sin \alpha}{4R^2 \cos^2 \alpha} (1 - \cos(2R \cos \alpha t))}$$

• Para y' Derivamos la ec (11)

$$(11) \Rightarrow \ddot{y}' = -2R \cos \alpha \ddot{x}' \quad ; \text{ Reemplazamos } \ddot{x}' \text{ de (1)}$$

$$= -2R \cos \alpha (g \sin \alpha + 2R \cos \alpha \dot{y}')$$

$$\Rightarrow \ddot{y}' = -2Rg \cos \alpha \sin \alpha - 4R^2 \cos^2 \alpha \dot{y}' \quad (12)$$

• Resolvemos (12) con $A = -2Rg \cos \alpha \sin \alpha$ y $\omega^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{-2Rg \cos \alpha \sin \alpha}{4R^2 \cos^2 \alpha} \cdot t + C_4 \cos(2R \cos \alpha t) + C_5 \sin(2R \cos \alpha t) + C_6$$

$$\Rightarrow y'(t) = -\frac{g \sin \alpha}{2R \cos \alpha} t + C_4 \cos(2R \cos \alpha t) + C_5 \sin(2R \cos \alpha t) + C_6$$

• Imponemos las condiciones iniciales

$$\rightarrow y'(0) = C_4 + C_6 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_4 = -C_6$$

$$\rightarrow \dot{y}'(0) = -\frac{g \sin \alpha}{2R \cos \alpha} = C_4 (2R \cos \alpha) \cancel{\sin(2R \cos \alpha \cdot 0)} + C_5 (2R \cos \alpha) \cos(2R \cos \alpha \cdot 0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow C_5 = \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)^2}$$

$\rightarrow$ De (4) en t=0 tenemos

$$\ddot{y}'(0) = -2R \cos \alpha \ddot{x}'(0) \Rightarrow \ddot{y}' = 0$$

$$\rightarrow \ddot{y}'(0) = -C_4 (2R \cos \alpha)^2 \cos(2R \cos \alpha \cdot 0) + C_5 (2R \cos \alpha)^2 \cancel{\sin(2R \cos \alpha \cdot 0)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} y'(t) &= \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)^2} \left(\sin(2R \cos \alpha t) - (2R \cos \alpha) t \right) \end{aligned} \right\}$$

c) Det. la máxima rapidez relativa y el punto de máximo descenso

• Calculamos la rapidez relativa: $v'^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2$, con

$$\dot{x}' = \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)^2} \cdot (2R \cos \alpha) \cdot \sin(2R \cos \alpha t) = \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)} \sin(2R \cos \alpha t)$$

$$\dot{y}' = \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)^2} \left[(2R \cos \alpha) \cos(2R \cos \alpha t) - (2R \cos \alpha) \right]$$

$$= \frac{g \sin \alpha}{(2R \cos \alpha)} [\cos(2R \cos \alpha t) - 1]$$

$$\Rightarrow v'^2 = \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{(2R \cos \alpha)^2} \left[\sin^2(2R \cos \alpha t) + (\cos(2R \cos \alpha t) - 1)^2 \right]$$

$$= \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{(2R \cos \alpha)^2} \left[\sin^2(2R \cos \alpha t) + \cos^2(2R \cos \alpha t) + 1 - 2 \cos(2R \cos \alpha t) \right]$$

$$= \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{2 R^2 \cos^2 \alpha} [1 - \cos(2R \cos \alpha t)]$$

• v' Máximo será cuando $\cos(2R \cos \alpha t) = -1$

$$\Rightarrow v'_{\max} = \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{R^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \boxed{v'_{\max} = \frac{g \tan \alpha}{R}}$$

• x' Máximo será también cuando $\cos(2R \cos \alpha t) = -1$

$$\boxed{x'_{\max} = \frac{g \sin \alpha}{2 R^2 \cos^2 \alpha}}$$