

Auxiliar 15: Sistemas de referencias no inerciales

• En pocas palabras:

"Consiste en describir la dinámica de un cuerpo usando un sistema coordenado cuyo origen está acelerando"

¿Por qué? $\rightarrow$ La geometría del problema hace que sea más sencillo pararnos en este origen móvil

$\rightarrow$ Es más realista.

¿Acelerado? $\rightarrow$ Aceleración lineal
 $\rightarrow$ Rotando } Ambas

$$m \ddot{\vec{a}} = \vec{F} - m \ddot{\vec{R}} - \underbrace{m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{F_{\text{Za Centrífuga}} - \underbrace{2m \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{F_{\text{Za Coriolis}} - \underbrace{m \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{F_{\text{Za Transversal}}}}$$

• $\vec{F}$: fuerzas externas

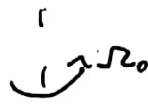
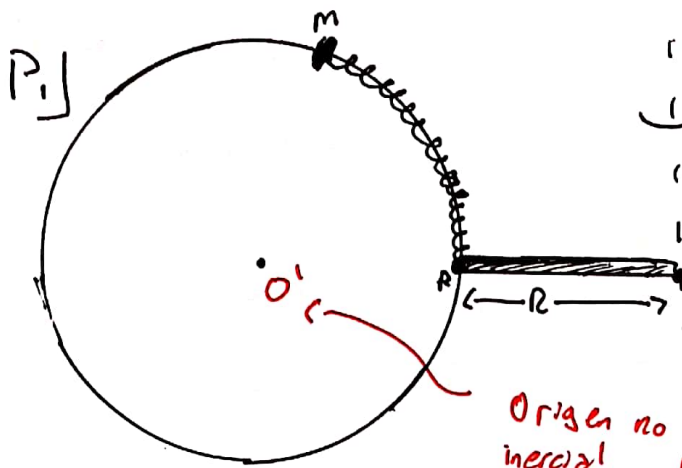
• $\vec{r}'$: posición de la partícula ctr al origen del sistema no inercial

• $\vec{R}$: posición del origen del sistema no inercial respecto a uno inercial

• $\vec{\Omega}$: Rotación del sistema de referencia no inercial respecto al fijo

Oso: así usaremos que si un punto gira en torno a un eje $\hat{e}_i$ general con rapidez angular Ω , $\vec{\Omega}$ tendrá la forma: $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_i$

Oso
 $\vec{a} = \ddot{\vec{r}'}$



Paso 1 | Identificar los orígenes inercial y no inercial

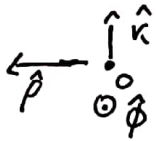
Origen inercial

Origen no inercial

¿Por qué elegimos O' ? $\rightarrow$ Queremos describir el movimiento de la masa y si usamos O' como origen, la trayectoria será circunferencial.

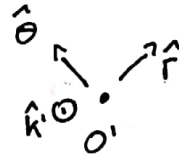
Paso 2 | Establecer un sistema coordenado para cada origen.

Sist inercial: polares



(Este sistema busca describir O')

Sist no inercial



(Este sistema describe a la masa)

$$\vec{r}' = R \hat{r}$$

$$\vec{v}' = R \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a}' = R (-\dot{\theta}^2 \hat{r} + \ddot{\theta} \hat{\theta})$$

Paso 3 | Identificar $\vec{R}$ y $\vec{\Omega}$

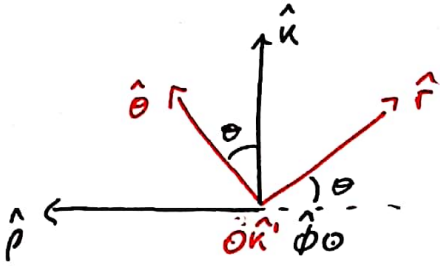
$$\vec{R} = 2R \hat{p} \Rightarrow \ddot{\vec{R}} = 2R (-\dot{\phi}^2 \hat{p} + \ddot{\phi} \hat{\phi})$$

Pero

$$\dot{\phi} = \Omega_0, \ddot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= -2R\Omega_0^2 \hat{p} \\ \vec{\Omega} &= \Omega_0 \hat{k} \end{aligned}}$$

Paso 4



$$\hat{\rho} = -\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}$$

$$\hat{k} = \text{Sen } \theta \hat{r} + \text{Cos } \theta \hat{\theta}$$

$$\hat{\phi} = \hat{\kappa}^1$$

Paso 5!

$$\bullet \quad m \ddot{\rho} = -m \cdot 2R \Omega_0^2 \hat{\rho} = -2mR \Omega_0^2 (-\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

$$\bullet \quad m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m \Omega_0 \hat{k} \times (\Omega_0 \hat{k} + R \hat{r})$$

$$= m \Omega_0 (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \times [\Omega_0 (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \times R \hat{r}]$$

$$= m \int_0^{\pi} (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \times \int_0^{2\pi} R \cos \theta \underbrace{(\hat{\theta} \times \hat{r})}_{-\hat{k}} d\phi$$

$$= -mR\Omega_0^2 \cos\theta [\cos\theta (\hat{\theta} \times \hat{k}') + \sin\theta (\hat{r} \times \hat{k}')]]$$

$$= -mR\Omega_0^2 \cos\theta (\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

$$\bullet \quad 2m \vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}' = 2m \Omega_0 \hat{k} \times R \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$= 2m \rho_0 k \times R \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$= 2m \rho_0 \underbrace{(\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta})}_{\hat{k}} \times R \dot{\theta} \hat{\theta}$$

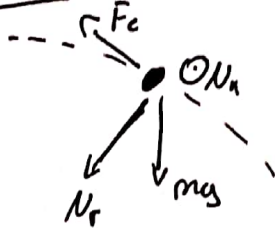
$$= 2m R R_0 \dot{\theta} \sin \theta \hat{k}'$$

$$\bullet \quad m \dot{\vec{L}} \times \vec{r}' = 0$$

Paso 6 | Escribir $\ddot{\mathbf{a}}'$ y $\ddot{\mathbf{F}}$ respecto a O'

$$\bullet \mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{r}}' = R(-\dot{\theta}^2 \hat{r} + \ddot{\theta} \hat{\theta})$$

DCI



$$\begin{aligned} \sum \hat{\mathbf{F}} &= -mg \hat{u} + F_c \hat{\theta} - N_r \hat{r} + N_n \hat{u} \quad ; \quad F_c = -\kappa R \theta \\ &= -mg(\cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \hat{r}) + (-\kappa R \theta) \hat{\theta} - N_r \hat{r} + N_n \hat{u} \end{aligned}$$

Paso 7 | Escribir la ecuación de Movimiento:

$$\begin{aligned} mR(-\dot{\theta}^2 \hat{r} + \ddot{\theta} \hat{\theta}) &= -mg(\cos \theta \hat{\theta} + \sin \theta \hat{r}) - \kappa R \theta \hat{\theta} - N_r \hat{r} + N_n \hat{u} \\ &+ 2mR\Omega_0^2(-\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) - m\Omega_0^2 R(\cos^2 \theta \hat{r} - \cos \theta \sin \theta \hat{\theta}) \\ &- 2mR\Omega_0 \dot{\theta} \sin \theta \hat{u} \end{aligned}$$

Paso 8 | Separar mas por componentes

$$\hat{r}] \quad -mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta - N_r - 2mR\Omega_0^2 \cos \theta - m\Omega_0^2 R \cos^2 \theta$$

$$\hat{\theta}] \quad Rm\ddot{\theta} = -mg \cos \theta - \kappa R \theta + 2mR\Omega_0^2 \sin \theta + mR\Omega_0^2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\hat{u}] \quad 0 = N_n - 2mR\Omega_0 \dot{\theta} \sin \theta$$

Paso 9 Resolver el problema

a) Determinar Ω_0 si $\theta = \pi/2$ es equilibrio

- Tomamos $\theta = \pi/2$ equilibrio en la ec $\dot{\theta}$
 $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow 0 = -mg \cos(\pi/2) - \frac{kR\pi}{2} + 2mR\Omega_0^2 \sin(\pi/2) + mgR\Omega_0^2 \cos(\pi/2) \sin(\pi/2)$$

$$\Rightarrow \frac{kR\pi}{2} = 2mR\Omega_0^2 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{\frac{k\pi}{4m}}$$

b) Determinar $\dot{\theta}_0$ min para llegar de A ($\theta = \pi/2$) hasta B ($\theta = \pi$)

- Usamos la ec en $\dot{\theta}$

$$Rm\ddot{\theta} = -mg \cos \theta - \frac{kR\theta}{m} + 2mR\Omega_0^2 \sin \theta + mR\Omega_0^2 \cos \theta \sin \theta$$

- Usamos el truco: $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}d\dot{\theta} = -g \cos \theta d\theta - \frac{kR}{m} \theta d\theta + 2R\Omega_0^2 \sin \theta d\theta + R\Omega_0^2 \cos \theta \sin \theta d\theta \quad \Bigg| \int_{\dot{\theta}_0}^0, \int_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= R \int_{\dot{\theta}_0}^0 \dot{\theta} d\dot{\theta} = -g \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d\theta - \frac{kR}{m} \int_{\pi/2}^{\pi} \theta d\theta + 2R\Omega_0^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta d\theta + R\Omega_0^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{-\dot{\theta}_0^2 R}{2} = -g \underbrace{\sin \theta \Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{(0-1)} - \frac{kR}{m} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(\pi/2)^2}{2} \right) + 2R\Omega_0^2 \underbrace{\cos \theta \Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{(-1-0)} + R\Omega_0^2 \underbrace{\frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi}}_{\frac{1}{2}(0^2-1)}$$

$$= g - \frac{3}{8} \frac{kR\pi^2}{m} + 2R\Omega_0^2 - \frac{R\Omega_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{6}{8} \frac{kR\pi^2}{m} - \frac{3}{2} \Omega_0^2 - \frac{2g}{R}}$$