

Auxiliar 13: Oscilaciones acopladas y Amortiguadas.

Repaso:

→ Vamos a tomar como punto de partida la ecuación de un oscilador armónico simple:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

→ Para un sistema de más de una partícula se puede llegar a un sistema de ecuaciones similar, mostrando el sistema acoplado

$$\ddot{\vec{x}} + W \vec{x} = 0$$

Donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{pmatrix}$ (No confundir con la aceleración)

W : matriz de $n \times n$ llamada matriz de frecuencias

→ Si diagonalizamos la matriz W obtendremos dos cosas:

Valores propios: Frecuencias de oscilación

Vectores propios: Modos de oscilación (Amplitudes y Movimientos relativos entre partículas)

OJO: * Un sistema acoplado de n partículas tendrá " n formas de oscilar"

* la solución más general será:

$$\vec{X}(t) = \vec{v}_1 (a_1 \cos(\omega_1 t) + b_1 \sin(\omega_1 t)) + \vec{v}_2 (a_2 \cos(\omega_2 t) + b_2 \sin(\omega_2 t)) + \dots \\ + \vec{v}_n (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t))$$

a_n, b_n : son constantes determinadas por las condiciones iniciales

$\vec{v}_n$: vectores propios

ω_n : valores propios

P1) Oscilador Amortiguado

→ La amplitud de un oscilador amortiguado decrece en n periodos a $1/e$ de su valor inicial. Mostrar que su frecuencia es $\left[1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right]^{-1/2}$ veces la del oscilador sin roce

• Vamos a resolver la ec del oscilador amortiguado:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad \therefore \omega_0^2 = k/m$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad / \text{ Usamos el ansatz } x = e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{\gamma}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\gamma/m \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\gamma}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

• Tendremos un sistema que oscila solo si: $\omega_0^2 > \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2$, la solución será

$$x = [\tilde{A}e^{i\omega t} + \tilde{B}e^{-i\omega t}] e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \right] e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$$

• En $t=0 \Rightarrow x(0) = A$

• Luego de n periodos $x_n = A/e$, evaluamos la solución en $t_n = nT$

$$\Rightarrow \frac{A}{e} = \left[A \cos(\omega nT) + B \sin(\omega nT) \right] e^{-\frac{\gamma}{2m}nT} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pero } T = \frac{2\pi}{\omega} \end{array} \right.$$

$$= \left(A \cos(2\pi n) + B \sin(2\pi n) \right) e^{-\frac{\gamma}{2m} \frac{2\pi n}{\omega}}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{e} = A e^{-\frac{\gamma}{2m} \cdot \frac{2\pi n}{\omega}} \quad (\Rightarrow) 1 = \frac{\gamma \pi n}{m \omega} \Rightarrow \gamma = \frac{m \omega}{\pi n}$$

• Reemplazamos en $\omega = (\omega_0^2 - (\frac{1}{2m})^2)^{1/2}$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\frac{1}{2m}}{2\pi} \right)^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\omega^2}{(2\pi m)^2} \Leftrightarrow \omega^2 \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 m^2} \right) = \omega_0^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\omega}{\omega_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1/2}}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$0 = \ddot{x} + \omega^2 x$$

$$0 = \ddot{x} + \omega^2 x$$

$$0 = \ddot{x} + \omega^2 x$$

$$\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2m} \right)^2} = \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2 m^2}}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega^2 x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2m}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\pi^2 m^2}}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 m^2}}$$

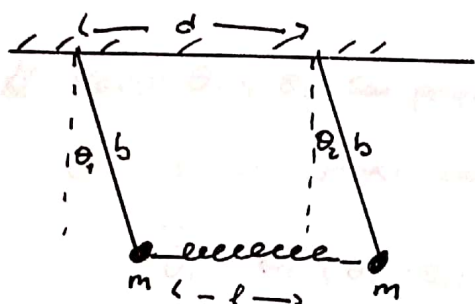
$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 m^2}} \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 m^2} \right)$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 m^2} \right)$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 m^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{8\pi^2 m^2 \omega_0}$$

P2] Oscilador Acoplados

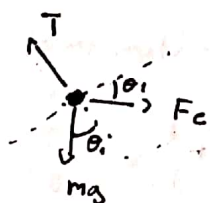
- Tenemos dos péndulos unidos por un resorte de largo natural d y constante elástica k . Si el resorte está siempre horizontal, encontrar los modos normales.



- En primer lugar notemos que la magnitud de la fuerza elástica será:

$$|F_e| = k(l - d) = k(d + b\sin\theta_2 - b\sin\theta_1 - d) \\ = kb(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

- Veamos las fuerzas sobre la primera masa



$$\sum \vec{F} = (F_e \cos\theta_1 - mg \sin\theta_1) \hat{\theta}_1 + (mg \cos\theta_1 + F_e \sin\theta_1 - T) \hat{\rho}$$

- Vamos a usar solo la ec de movimiento en $\hat{\theta}_1$ ya que en esa la aceleración tiene la forma $\ddot{\vec{a}}_\theta = m\ddot{\theta}_1 \hat{\theta}_1$

$$\Rightarrow \underline{\theta_1} \quad m\ddot{\theta}_1 = F_e \cos\theta_1 - mg \sin\theta_1$$

- La ecuación de movimiento para θ_2 será idéntica salvo por el signo de la fuerza elástica:

$$\underline{\theta_2} \quad bm\ddot{\theta}_2 = -F_e \cos\theta_2 - mg \sin\theta_2$$

- Reemplazamos F_e en el sistema:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{kb}{bm} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \cos\theta_1 - \frac{mg}{bm} \sin\theta_1$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{kb}{bm} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \cos\theta_2 - \frac{mg}{bm} \sin\theta_2$$

Es un sistema acoplado porque en la ecuación para θ_1 hay un θ_2 y viceversa.

- Usando las definiciones $\omega_r^2 = \frac{k}{m}$ y $\omega_g^2 = \frac{g}{b}$

$$\ddot{\theta}_1 = \omega_r^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cos \theta_1 - \omega_g^2 \sin \theta_1$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\omega_r^2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \cos \theta_2 - \omega_g^2 \sin \theta_2$$

★ Pero: θ_1 y θ_2 son pequeños y podemos usar: $\sin x \approx x$, $\cos(x) \approx 1$ $x \ll 1$,

El sistema aproximado será:

$$\ddot{\theta}_1 = \omega_r^2 (\theta_2 - \theta_1) - \omega_g^2 \theta_1$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\omega_r^2 (\theta_2 - \theta_1) - \omega_g^2 \theta_2$$

$\Leftrightarrow$

$$\ddot{\theta}_1 = -\left((\omega_r^2 + \omega_g^2)\theta_1 - \omega_r^2 \theta_2\right)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\left(-\omega_r^2 \theta_1 + (\omega_r^2 + \omega_g^2)\theta_2\right)$$

- De forma matricial será:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_r^2 + \omega_g^2 & -\omega_r^2 \\ -\omega_r^2 & \omega_r^2 + \omega_g^2 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0$$

- Le sacamos los valores propios $\Rightarrow M \Leftrightarrow \det(M - I\omega^2) = 0$

$$\begin{vmatrix} \omega_r^2 + \omega_g^2 - \omega^2 & -\omega_r^2 \\ -\omega_r^2 & \omega_r^2 + \omega_g^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_r^2 + \omega_g^2 - \omega^2)^2 - \omega_r^4 \stackrel{!}{=} 0$$

- Resolvemos para ω^2 (Es resolver una ecuación cuadrática)

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_r^2 + \omega_g^2 \pm \omega_r^2$$

- Las soluciones serán:

$$\boxed{\omega_+^2 = \omega_r^2 + 2\omega_g^2}$$

$$\boxed{\omega_-^2 = \omega_g^2}$$

- Finalmente buscamos los vectores propios, o sea, resolvemos $M \vec{v} = \omega^2 \vec{v}$

$$\omega_+ \left[\begin{pmatrix} \omega_p^2 + \omega_r^2 & -\omega_r^2 \\ -\omega_r^2 & \omega_p^2 + \omega_r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\omega_p^2 + 2\omega_r^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{1ra fila} \Rightarrow (\cancel{\omega_p^2} + \omega_r^2)x - \omega_r^2 y = (\cancel{\omega_p^2} + 2\omega_r^2)x$$

$$\Rightarrow -\omega_r^2 y = \omega_r^2 x \Rightarrow \boxed{\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\omega_- \left[\begin{pmatrix} \omega_p^2 + \omega_r^2 & -\omega_r^2 \\ -\omega_r^2 & \omega_p^2 + \omega_r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega_p^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{1ra fila} \Rightarrow (\cancel{\omega_p^2} + \omega_r^2)x - \omega_r^2 y = \cancel{\omega_p^2}x$$

$$\Rightarrow \omega_r^2 x = \omega_r^2 y \Rightarrow \boxed{\vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- Esto nos dice que en modo de oscilación las masas se moverán en sentidos opuestos ($\vec{v}_+$) con una frecuencia de oscilación ω_+ , en el otro se moverán en el mismo sentido ($\vec{v}_-$) con frec ω_- .

