

Aux 12 : Oscilaciones

Repaso

- Habíamos dicho que podríamos estudiar la dinámica de un sistema con el potencial: $U(\vec{r})$, donde

$$\vec{F} = -\nabla U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U = - \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{z}$$

- Los equilibrios serán cuando $\nabla U = 0$, donde los equilibrios serán estables si la segunda derivada es positiva
- Esto es útil ya que podemos estudiar un sistema en torno a sus puntos de equilibrio:

$$U(x) \approx U(x_{eq}) + \frac{1}{2} U''(x_{eq}) (x - x_{eq})^2$$

Ec de Mov:

$$m \ddot{x} = - \frac{d}{dx} U(x) = - U''(x_{eq}) (x - x_{eq})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{U''(x_{eq})}{m} (x - x_{eq}) = 0 \quad ; \quad \text{Si } U''(x_{eq}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 (x - x_{eq}) = 0} \quad \text{Oscilador armónico.}$$

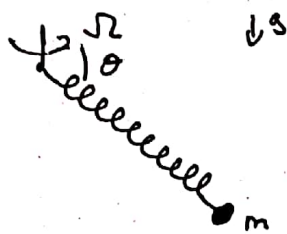
¿Qué pasa si tenemos la ec de movimiento solamente? (Si partimos con dinámica)

$\ddot{x} + \frac{F(x)}{m} = 0$, Hacemos lo mismo, vemos los equilibrios $F(x_{eq}) = 0$ y expandimos $F(x) \approx F(x_{eq}) + \frac{dF(x_{eq})}{dx} (x - x_{eq})$ (orden lineal)

• La ec de Mov sería

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{m} F'(x_{eq}) (x - x_{eq}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 (x - x_{eq}) = 0} \quad \text{con } \omega_0^2 = \frac{F'(x_{eq})}{m} > 0$$

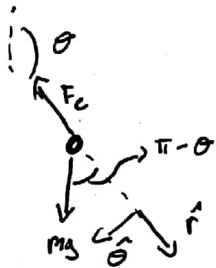
P.1] Tenemos un sistema resorte partícula de la forma:



Datos: Ω, l_0 y freq de oscilacion natural del resorte $\omega^2 = \frac{k}{m}$

a) Encontrar θ_0 y r_0 de equilibrio

→ Trabajaremos con dinámica; veamos las fuerzas:



$$\begin{aligned}\sum F &= mg(\cos(\pi-\theta)\hat{r} + \sin(\pi-\theta)\hat{\theta}) - k(r-l_0)\hat{r} \\ &= mg(-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) - k(r-l_0)\hat{r}\end{aligned}$$

→ la aceleración será. $\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\Omega^2 \sin^2\theta \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\Omega^2 \sin\theta \cos\theta \\ \frac{\Omega}{r \sin\theta} \frac{d}{dt}(r^2 \sin\theta) \end{pmatrix}$

→ Hacemos $\vec{F} = m\vec{a}$ por componentes.

$$\hat{r}] \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\Omega^2 \sin^2\theta) = -mg\cos\theta - k(r-l_0)$$

$$\hat{\theta}] \quad r(\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - \Omega^2 \sin\theta \cos\theta) = mg\sin\theta$$

$$\hat{\phi}] \quad \frac{\Omega}{r \sin\theta} \frac{d}{dt}(r^2 \sin\theta) = 0 \Leftrightarrow r^2 \sin\theta = C$$

→ Imponemos la condición de equilibrio $r=r_0, \theta=\theta_0 \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=\dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$
las ecuaciones quedan:

$$\hat{r}] \quad + m r_0 \Omega^2 \sin^2\theta_0 = + mg\cos\theta_0 + k(r_0-l_0)$$

$$\hat{\theta}] \quad - r_0 \Omega^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 = g\sin\theta_0 \Leftrightarrow \boxed{r_0 = -\frac{g/\Omega^2}{\cos\theta_0}}$$

Por la geom. del problema:
 $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow \cos\theta_0 < 0$

→ De la ec en $\hat{r}$ reemplazamos r_0

$$\Leftrightarrow -\frac{g/\Omega^2}{\cos \theta_0} \cdot \Omega^2 \sin^2 \theta_0 = g \cos \theta_0 + \frac{\kappa}{m} \left(\frac{g/\Omega^2}{\cos \theta_0} - l_0 \right) \quad \left| \quad \omega^2 = \frac{\kappa}{m} \right|$$

$$\Leftrightarrow -\frac{g(1-\cos^2 \theta_0)}{\cos \theta_0} = g \cos \theta_0 - \frac{\omega^2 g/\Omega^2}{\cos \theta_0} - l_0 \omega^2$$

$$\Leftrightarrow -g + \cancel{g \cos \theta_0} = \cancel{g \cos \theta_0} - \frac{\omega^2 g}{\Omega^2} - l_0 \omega^2 \cos \theta_0$$

$$\Leftrightarrow l_0 \omega^2 \cos \theta_0 = g \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2} \right) \Leftrightarrow \boxed{\cos \theta_0 = \frac{g}{l_0} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right)}$$

$$\rightarrow \text{Luego } r_0 = \frac{-l_0}{\Omega^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r_0 = \frac{l_0}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)}}$$

Nota: Para que estos resultados tengan sentido $\Omega^2 < \omega^2$

b) Determinar las frecuencias de pequeñas oscilaciones para una perturbación radial y otra zenital

• Vamos primero una perturbación radial, o sea hacemos $\theta = \theta_0$, pero r es variable:

$$\Leftrightarrow \hat{r} \left[\ddot{r} - r \Omega^2 \sin^2 \theta_0 \right] = g \cos \theta_0 - \omega^2 (r - l_0)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} - r (\Omega^2 \sin^2 \theta_0 - \omega^2) - g \cos \theta_0 - \omega^2 l_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} + r \underbrace{(\omega^2 - \Omega^2 \sin^2 \theta_0)}_{\omega_r^2} - g \cos \theta_0 - \omega^2 l_0 = 0$$

$\therefore$ la ec es de el estilo $\ddot{x} + \omega_o^2 x + c = 0$, de un oscilador desplazado con frecuencia de oscilación ω_r^2

$$\boxed{\omega_r^2 = \omega^2 - \Omega^2 \sin^2 \theta_0}$$

Solo si $\omega^2 > \Omega^2 \sin^2 \theta_0$

- Para una perturbación angular, hacemos $r=r_0$ y θ variable en la ecuación $\hat{\theta}$

$$\Leftrightarrow r_0 \ddot{\theta} - r_0 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{r_0} \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{r_0} \sin \theta = 0$$

¿Que hacemos ahora?, queremos llegar a una expresión con la siguiente forma $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta + \bar{c} = 0$, pero tenemos algo del estilo $\ddot{\theta} + f(\theta) = 0$, podemos hacer un Taylor en torno a θ_0 para $f(\theta)$

$$\rightarrow \text{Si } f(\theta) = -\Omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{r_0} \sin \theta, \quad f'(\theta) = -\Omega^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \frac{g}{r_0} \cos \theta$$

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

$$= -\Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{g}{r_0} \sin \theta_0 + \left[\Omega^2 (\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) - \frac{g}{r_0} \cos \theta_0 \right] (\theta - \theta_0)$$

$$= \cancel{-\Omega^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0} + \cancel{\frac{g \sin \theta_0}{r_0}} + \left[-\Omega^2 \cos(2\theta_0) + \frac{\Omega^2 \cos^2 \theta_0}{1} \right] (\theta - \theta_0)$$

$$= +\Omega^2 (-\cos(2\theta_0) + \cos^2 \theta_0) (\theta - \theta_0)$$

• La ecuación en $\hat{\theta}$ queda:

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\Omega^2 (-\cos(2\theta_0) + \cos^2 \theta_0)}_{\omega_0^2} (\theta - \theta_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_0^2 = \Omega^2 (-\cos(2\theta_0) + \cos^2 \theta_0)}$$