

Aux 11 : Equilibrio y Oscilaciones

Repaso :

→ Estudiaremos los sistemas a través de los potenciales U (Recordar que $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ si el sistema es conservativo)

Es: En 1-D $U(x) \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{x}$

→ los equilibrios en el sistema ocurrirán si $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_{eq}} = 0$

→ Con un equilibrio podemos ver su estabilidad con la 2^{da} derivada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \quad \text{Estable} \quad \checkmark, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \quad \text{Inestable} \quad \cap$$

→ ¿Por qué es relevante? : Si un sistema es muy complejo podemos estudiar los movimientos en torno a estos equilibrios de forma sencilla haciendo un Taylor en el potencial

$$\begin{aligned} U(x) &\approx U(x_{eq}) + \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2 \\ &= U(x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2 \end{aligned}$$

→ Con esta aproximación la ecuación de movimiento queda:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial U(x_{eq})}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_{eq}} \frac{\partial}{\partial x} (x - x_{eq})^2 \\ &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) \end{aligned}$$

- Llegamos a una expresión bastante conocida:

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) = 0$$

→ Si: $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} > 0$

la ec es de un oscilador armónico:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (x - x_{eq}) = 0$$

$$\text{con } \omega_0^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}}$$

la frecuencia del sistema

Si: $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} < 0$

la ec es de esta forma:

$$\ddot{x} - \lambda^2 (x - x_{eq}) = 0$$

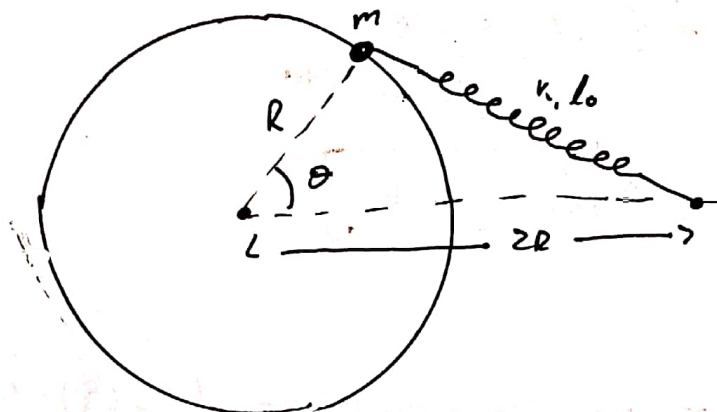
$$\text{con } \lambda^2 = \frac{1}{m} \left| \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} \right|$$

Con soluciones de exponenciales que divergen.

- ⓪30: estas son soluciones aproximadas en torno a estos equilibrios.

P.1]

↓ g



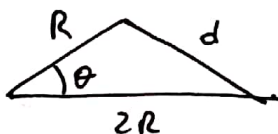
- Encontrar l_0 si $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ es equilibrio
- Determinar k si $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ es equilibrio
- Ver la estabilidad de θ_1 y θ_2

a)

- Veamos el potencial del sistema: $U = U_{\text{grav}} + U_{\text{elás}}$, si d es la elongación del resorte y h la altura de la masa, nos queda:

$$U = mgh + \frac{k}{2} (d - l_0)^2$$

- h es sencillo, proyectamos verticalmente: $h = R \sin \theta$
- d lo sacamos con geometría, vemos el triángulo:



→ Por teorema del coseno:

$$d^2 = R^2 + (2R)^2 - 2R(2R) \cos \theta$$

$$\Rightarrow d = 2R \sqrt{5/4 - \cos \theta}$$

- El potencial nos queda: $U = mgR \sin \theta + \frac{k}{2} (2R \sqrt{5/4 - \cos \theta} - l_0)^2$
- Derivamos con respecto a θ

$$\frac{dU}{d\theta} = mgR \cos \theta + \frac{k}{2} \cdot 2 (2R \sqrt{5/4 - \cos \theta} - l_0) \cdot 2R \cdot \frac{1}{2 \sqrt{5/4 - \cos \theta}} \cdot (-\sin \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dU}{d\theta} = mgR \cos \theta + kR (2R \sqrt{5/4 - \cos \theta} - l_0) \frac{\sin \theta}{\sqrt{5/4 - \cos \theta}}}$$

- Evaluamos en $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e imponemos que sea equilibrio

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta_1} = mgR \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + kR \left(2R \sqrt{\frac{5}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - l_0 \right) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$= \frac{kR}{\sqrt{\frac{5}{4}}} \left(2R \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} - l_0 \right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{l_0 = \sqrt{5} R}$$

b)

- Evaluamos en $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ e imponemos que sea equilibrio ($\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta_2} = mgR \cdot \frac{1}{2} + kR \left(2R \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} - l_0 \right) \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}}$$

Usamos l_0 de la parte anterior

$$= \frac{mgR}{2} + kR^2 (\sqrt{3} - \sqrt{5})$$

Aproximamos: $\sqrt{3} \approx 1.7$
 $\sqrt{5} \approx 2.2$

$$\approx \frac{mgR}{2} - kR^2 (0.5) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{R}}$$

c)

- Sacamos la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mgR \sin \theta + kR \cdot \frac{\sin \theta}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta}} \cdot \frac{2R \cdot \sin \theta}{2\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta}}$$

$$+ kR \left(2R \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta} - l_0 \right) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta}} - \frac{\sin^2 \theta}{2(\frac{5}{4} - \cos \theta)^{3/2}} \right)$$

- Si reemplazamos con l_0 y k de antes, llegamos a:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR \left[-\sin \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\frac{5}{4} - \cos \theta} + \frac{(2\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta} - \sqrt{5})}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos \theta}} \left(\cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2(\frac{5}{4} - \cos \theta)} \right) \right]$$

- Evaluamos en $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, notando que el tercer término se anula

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_1} = mgR \left[-1 + \frac{4}{5} + 0 \right] = -\frac{mgR}{5} < 0 \quad \therefore \theta_1 \text{ es equilibrio inestable}$$

- Evaluamos en $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_2} = mgR \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\frac{3/4}{\sqrt{5/4 - 1/2}}}{\sqrt{5/4 - 1/2}} + \frac{(2\sqrt{5/4 - 1/2} - \sqrt{5})}{\sqrt{5/4 - 1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3/4}{2(\sqrt{5/4 - 1/2})} \right) \right]$$

$$= \frac{mgR}{2} (2 - \sqrt{3}) \quad ; \quad \sqrt{3} \approx 1.7$$

$$\approx mgR \frac{0.3}{2} > 0 \quad \therefore \theta_2 \text{ es equilibrio estable}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{3mgR}{20}}$$

Extra: ¿Cómo sacamos la frec de oscilación para este caso?

• Sabemos que: $m\vec{a} = -\vec{\nabla}U$, pero nuestro sistema es polar:

• En polares el gradiente cambia: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta}$

• Como nuestro potencial depende de θ únicamente tomamos la componente en $\hat{\theta}$ de la aceleración, obteniendo (con $\rho = R = \text{cte}$)

$$m R \ddot{\theta} = -\frac{1}{R} \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta}$$

Usamos la aproximación de U

$$U(\theta) \approx U(\theta_2) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_2} (\theta - \theta_2)^2$$

$$\approx -\frac{1}{R} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_2} (\theta - \theta_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{1}{mR^2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta_2}}_{\omega_0^2} (\theta - \theta_2) = 0}$$

ω_0^2 : Aparece un $\frac{1}{R^2}$ adicional cuando el mov es circular.