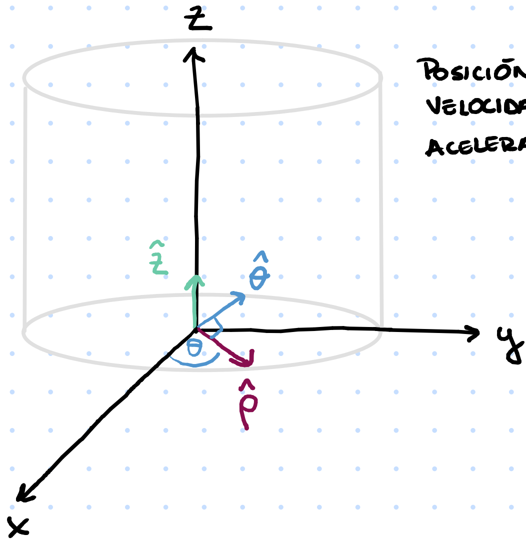
Auxiliar 3

Resumen

Lo ultimo de coordenadas curvilineas:

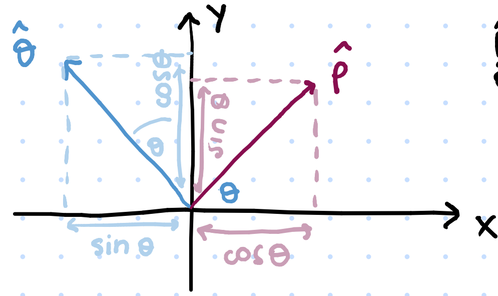
Cilindricas



Posición: $\vec r = \rho\hat\rho + z\hat z$

Velocidad: $\vec v = \dot\rho\hat\rho + \rho\dot\theta\hat\theta + \dot z\hat z$

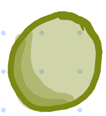
Aceleración: $\vec a = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\hat\rho + (2\dot\rho\dot\theta + \rho\ddot\theta)\hat\theta + \ddot z\hat z$

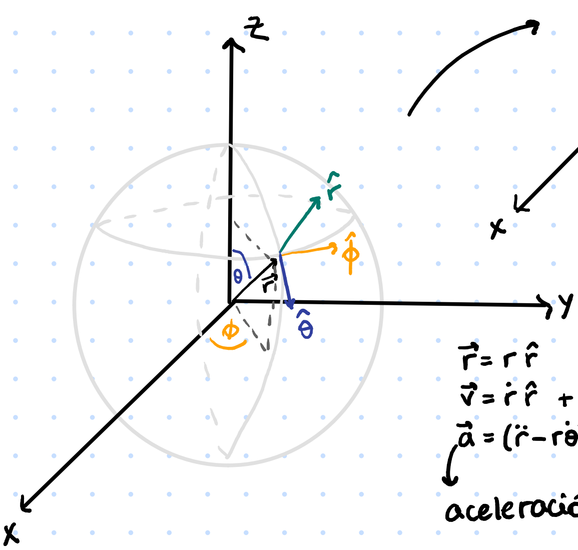


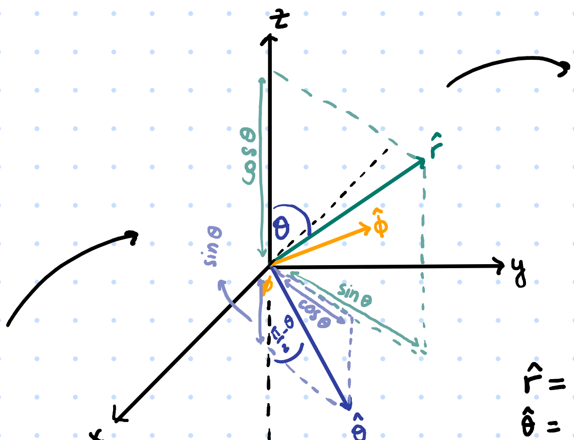
$$\hat\rho = \hat x\cos\theta + \hat y\sin\theta$$
$$\hat\theta = -\hat x\sin\theta + \hat y\cos\theta$$

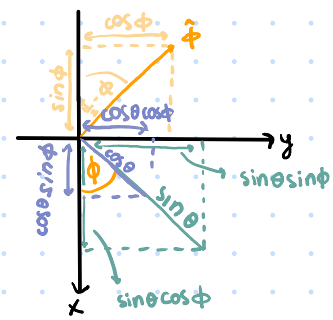
$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat r} &= \dot\theta\hat\theta \\ \dot{\hat\theta} &= -\dot\theta\hat r \\ \dot{\hat z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Derivadas vec. unitarios

Esféricas









$$\hat r = \sin\theta(\cos\phi\hat x + \sin\phi\hat y) + \cos\theta\hat z$$
$$\hat\theta = \cos\theta(\sin\phi\hat x + \cos\phi\hat y) - \sin\theta\hat z$$
$$\hat\phi = -\sin\phi\hat x + \cos\phi\hat y$$

$\vec r = r\hat r$ → posición

$\vec v = \dot r\hat r + r\dot\phi\sin\theta\hat\phi + r\dot\theta\hat\theta$ → velocidad

$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2\sin^2\theta)\hat r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\hat\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi\sin^2\theta)\hat\phi$

aceleración

$$\left.\begin{aligned} \dot{\hat r} &= \dot\phi\sin\theta\hat\phi + \dot\theta\hat\theta \\ \dot{\hat\theta} &= \dot\phi\cos\theta\hat\phi - \dot\theta\hat r \\ \dot{\hat\phi} &= -\dot\phi(\hat\theta\cos\theta + \hat r\sin\theta) \end{aligned}\right\}$$ Derivadas vec. unitarios

Ec. DE MOVIMIENTO

Ec. de movimiento son relaciones entre las coordenadas y sus derivadas

x, y, z en cartesianas
ρ, θ, z en cilíndricas
r, θ, φ en esféricas

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

Esta parte tenemos que "verla". Por eso usamos los DCL, para visualizar las fzas.

Esta es la parte donde usamos la materia anterior. A veces será más útil escribir la aceleración en cilíndricos o esféricas.

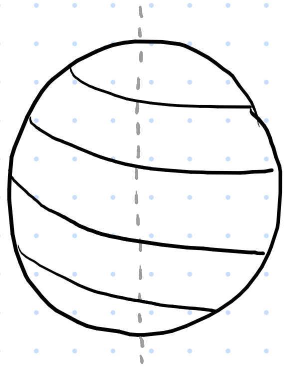
Todo este curso vamos a estar buscando estas ecuaciones, y por ahora la forma en la cual las encontraremos será usando la segunda ley de Newton

TRUCAZO

EN REALIDAD SOLO ES REGLA DE LA CADENA

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

P1



$r = R$
$\phi = N\theta$
$\dot\theta = \omega_0$

→ Datos

$\theta(t=0) = 0$ → cond. inicial.

R y N conocidas (N entero par)

a) Para hacer esto podemos hacer 2 cosas que son equivalentes:

1. Tomar el vector posición $\vec{r} = r\hat{r}$ y comenzar a derivarlo (No lo haremos porque matraca)
2. Tomar las expresiones que tenemos para $\vec{v}$ y $\vec{a}$ y reemplazar los datos del problema

$$\vec{v} = \dot r \hat r + r\dot\phi \sin\theta \,\hat\phi + r\dot\theta\hat\theta$$

Como los datos del problema me dicen que $r=R$ cte. (se mueve en la sup. de una esfera).

$$r = R \Rightarrow \dot r = 0$$

$$\phi = N\theta \Rightarrow \dot\phi = N\dot\theta = N\omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = RN\omega_0 \sin\theta\,\hat\phi + R\omega_0\hat\theta}$$

se mueve en latitud

Se mueve en longitud.

Hacemos lo mismo con la aceleración

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot r}_{0} - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta)\hat r + (\cancel{r\ddot\theta}_{0} + \cancel{2\dot r\dot\theta}_{0} - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\hat\theta + \frac{\hat\phi}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi\sin^2\theta)$$

$\dot\theta = \omega_0 = cte.$

$r = R \Rightarrow \dot r = \ddot r = 0$
$\phi = N\theta \Rightarrow \dot\phi = N\dot\theta = N\omega_0 \Rightarrow \ddot\phi = 0$
$\dot\theta = \omega_0 \Rightarrow \ddot\theta = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} = (-R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2\sin^2\theta)\hat r - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta\,\hat\theta + \frac{\hat\phi}{R\sin\theta}\frac{d}{dt}(R^2N\omega_0\sin^2\theta)$$

constante

depende del tiempo

$$\boxed{\vec{a} = -\omega_0^2(R + RN^2\sin^2\theta)\hat r - RN^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta\,\hat\theta + 2RN\omega_0\cos\theta\,\hat\phi}$$

b) Si queremos encontrar la longitud de la trayectoria (camino recorrido) integramos la rapidez (módulo de la velocidad)

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{R^2 \omega_0^2 N^2 \sin^2\theta + R^2 \omega_0^2}$$
$$= R\omega_0 \sqrt{1 + N \sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \ l = \int_{\theta_0}^{\theta_f} |\vec{v}| \, d\theta$$

$$\Rightarrow \ l = \int_0^{\pi} R\omega_0 \sqrt{1 + N^2 \sin^2\theta} \, d\theta$$

Para el tiempo es un poco más fácil si usamos el dato $\dot{\theta}$

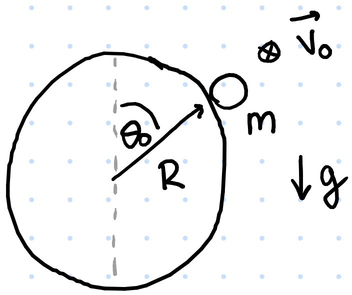
$$\dot{\theta} = \omega_0 \quad / \int_0^{t_f} dt$$

$$\theta(t_f) - \cancel{\theta(0)}^{\,0} = \omega_0 t_f$$

$$\pi = \omega_0 t_f$$

$$\Rightarrow \boxed{t_f = \pi / \omega_0}$$

P2



masa m
radio R
hay gravedad

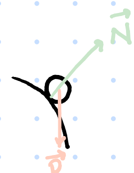
Datos

$\vec v_0 = v_0\hat\phi$
$\theta(t=0) = \pi/3$

cond. iniciales

a) como dijimos en el resumen, si queremos encontrar las ecuaciones de movimiento de la partícula, usamos la 2da Ley de Newton, partiendo por el DCL

Las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son la normal (perpendicular a la sup.) y el peso (siempre apuntando hacia abajo)



$$\Rightarrow \vec F = \vec N + \vec P = N\hat r - mg\hat z$$
$$= N\hat r - mg(\cos\theta\,\hat r - \sin\theta\,\hat\theta)$$

$$\Rightarrow \vec F = N\hat r - mg(\cos\theta\,\hat r - \sin\theta\,\hat\theta)$$

Luego escribimos la aceleración en esféricas:

$$\vec a = (\cancel{\ddot r}^{\,0} - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta)\hat r + (r\ddot\theta + 2\cancel{\dot r}^{\,0}\dot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\hat\theta + \frac{\hat\phi}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi\sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow \vec a = -r(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta)\hat r + (r\ddot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\hat\theta + \frac{r}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi\sin^2\theta)\hat\phi$$

Luego lo que debemos hacer es igualar $\vec F = m\vec a$ y separarlo por ec. escalares

$\hat r)$

$$-mr(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) = N - mg\cos\theta$$

$\hat\theta)$

$$m(r\ddot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta) = mg\sin\theta$$

$\hat\phi)$

$$\frac{mr}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\phi\sin^2\theta) = 0$$

EC'S DE MOVIMIENTO

b) Tomamos la ec. en $\hat\theta$.

$$\cancel{m}(R\ddot\theta - R\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta) = \cancel{m}g\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot\theta - \dot\phi^2\sin\theta\cos\theta = \frac{g}{R}\sin\theta \qquad (*)$$

notemos que esta "cosa" nos molesta (es lo único que no es θ), queremos escribirlo en func. de θ.

Acá veremos por qué es conveniente escribir la componente en $\hat{\phi}$ como una derivada total.

$$\frac{m\cancel{r}^{\,0}}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \quad \Big/ \int_0^t dt$$

sin θ nunca es nulo.

$$\dot{\phi}(t)\sin^2\theta(t) - \dot{\phi}_0\sin^2\theta_0 = 0$$

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = \dot{\phi}_0\sin^2\theta_0$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}$$

Lo reemplazamos en ⊛

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{\dot{\phi}_0^2\sin^4\theta_0}{\sin^{\cancel{4}3}\theta}\cancel{\sin\theta}\cos\theta = \frac{g}{R}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta + \dot{\phi}_0^2\sin^4\theta_0\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta + \dot{\phi}_0^2\sin^4\theta_0\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} \quad \Big/ \int d\theta$$

$$\int_{\dot{\theta}(0)}^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta}\left[\frac{g}{R}\sin\theta + \dot{\phi}_0^2\sin^4\theta_0\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\right]d\theta$$

$$\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = \int\frac{du}{u} = \ln(u) = \ln(\sin\theta)$$

$u = \sin\theta$
$du = \cos\theta\, d\theta$

$$\frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = \frac{g}{R}(\cos\theta_0 - \cos\theta) + \dot{\phi}_0^2\sin^4\theta_0\left(\ln(\sin\theta) - \ln(\sin\theta_0)\right)$$

Para encontrar las cond. iniciales, veamos que pasa con $\vec{v}_0$.

$$\vec{v} = \cancel{\dot{r}}^{\,0}\hat{r} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$= R\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi} + R\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad y \qquad \vec{v}_0 = v_0\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}_0 = 0 \qquad y \qquad R\dot{\phi}_0\sin\theta_0 = v_0$$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \qquad ; \qquad \dot{\phi}_0\sin\theta_0 = \frac{v_0}{R}$$

Luego, si la velocidad es:

$$\vec{v} = r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

tenemos $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ en fn. de θ

Para la aceleración sólo debemos derivar.

c) Para que la partícula despegue $N = 0$

$\hat{r})$ $\Rightarrow -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) = \cancel{N}^{0} - mg\cos\theta$ → cond. para que despegue.

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta = \frac{g}{R}\cos\theta$$

Reemplazamos ec. anteriores y dejamos expresado.