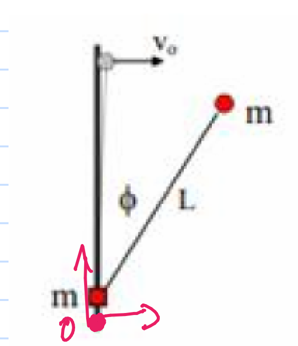
Tarea 7 FI 2001-6

P1) En el problema no hay gravedad

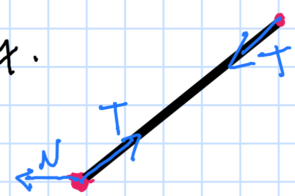


Nos piden $\dot{\phi}$ en función de ϕ

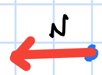
Para resolver el problema utilizaremos la 2da Ley de Newton para el CM y Torque sobre el eje de giro. (CM).

Tomaremos el origen en el punto O que es la posición inicial del anillo. Podemos decir también que el CM se encuentra en el punto medio de la cuerda.

Haremos un DCL de ambas masas para estudiar las fzas presentes.



Donde pusimos la normal hacia la izq.
Esto porque necesitamos que la fza Neta en el eje x sea 0 para que el anillo solo se mueva en el eje $\hat{j}$, notamos que entonces el DCL del sistema completo será



Con lo que tendremos las ec:

$$2m\,\ddot{x}_{cm} = -N \quad \wedge \quad 2m\,\ddot{y}_{cm} = 0$$

Por lo que necesitamos una expresión para $\ddot{x}_{cm}$, usando Trigonometría podemos escribir

$$\vec{R}_{cm}(\theta) = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\phi\,\hat{\imath} + \left(y + \frac{L}{2}\cos\phi\right)\hat{\jmath}$$

Donde y es la altura del anillo (función del tiempo)

$\vec{R}_{cm}(\theta) = \frac{L}{2}\,\text{sen}\,\phi\,\hat{\imath} + (y + \frac{L}{2}\cos\phi)\hat{\jmath}$ / Derivamos c/r al tiempo

$\dot{\vec{R}}_{cm}(\theta) = \frac{L}{2}\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{\imath} + (\dot{y} - \frac{L}{2}\dot{\phi}\sin\phi)\hat{\jmath}$ / una vez más

$\ddot{\vec{R}}_{cm}(\theta) = \left(\frac{L}{2}\ddot{\phi}\cos\phi - \frac{L}{2}\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\phi\right)\hat{\imath} + \left(\ddot{y} - \frac{L}{2}\dot{\phi}^2\cos\phi - \frac{L}{2}\ddot{\phi}\sin\phi\right)\hat{\jmath}$

Reemplazando $\ddot{x}_{cm}$ en Newton

$$2m_0 \cdot \frac{L}{2}\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\phi\right) = -N$$

$\Rightarrow N = mL\left(\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\phi - \ddot{\phi}\cos\phi\right)$ / con lo que tenemos una expresión para N

Ahora queremos usar la eq de Torque

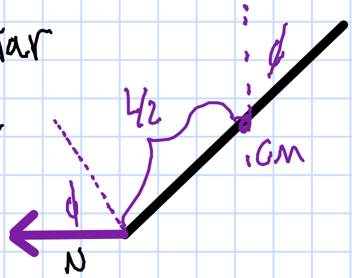
$I_0\ddot{\phi} = \tau_{ext}$, Tomaremos como eje de giro el CM

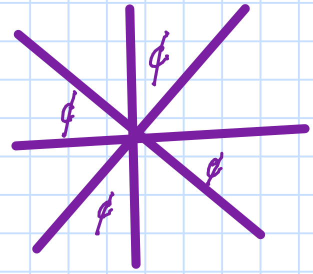
por lo que la inercia I_0 será

$$I_0 = \sum m_i r_i^2 = m_0\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = m\frac{L^2}{2},$$

Ahora queremos calcular el torque, para lo que necesitamos la componente perpendicular al brazo

Con el dibujo podemos notar que queremos la componente asociada al coseno de ϕ





Notamos que ste torque hace crecer ϕ, por lo que es positivo, así

$$\ddot{\phi}\, m \frac{l^2}{2} = \frac{L}{2} \cdot N \cos\phi \qquad / \text{ Usando } N = mL(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\phi - \ddot{\phi}\cos\phi)$$

$$\ddot{\phi} = -\ddot{\phi}\cos^2\phi + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi$$

$$\ddot{\phi}(1+\cos^2\phi) = \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi \qquad / \text{ Haciendo el truco de Mecanica}$$

$$\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \dot{\phi}^2 \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi}{1+\cos^2\phi} \qquad \ddot{\phi} = \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$$

$$\frac{1}{\dot{\phi}}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \frac{\operatorname{Sen}\phi\cos\phi}{(1+\cos^2\phi)} \qquad / \int_{\phi=0}^{\phi=\phi} d\phi$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\phi}(0)}^{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}}{\dot{\phi}} = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi} \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi}{1+\cos^2\phi} \qquad / \text{ Integramos, ambos son logaritmos}$$

$$\ln\left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}(0)}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos^2\phi}{1+\cos^2(0)}\right)$$

$$\ln(\dot{\phi}/\dot{\phi}(0)) = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{1+\cos^2\phi}}\right) \Rightarrow \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}(0)} = \sqrt{\frac{2}{1+\cos^2\phi}}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \dot{\phi}(0) \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\cos^2\phi}} \qquad / \text{ Ahora necesitamos } \dot{\phi}(0)$$

Para lo que tenemos que calcular $V_{cm}(0)$

$$\vec{V}_{cm}(0) = \frac{1}{2m}\cdot(V_0\hat{x}\cdot m + \vec{0}\cdot m) \Rightarrow \vec{V}_c(0) = \frac{V_0}{2}$$

y tenemos que el brazo de giro es $\frac{L}{2}$, entonces

$$\frac{L}{2}\cdot\dot{\phi}(0) = \vec{V}_{cm}(0) \Rightarrow \frac{L}{2}\cdot\dot{\phi}(0) = \frac{V_0}{2} \Rightarrow \dot{\phi}(0) = \frac{V_0}{L}$$

Así $$\dot{\phi}(\phi) = \frac{V_0}{L}\cdot\sqrt{\frac{2}{1+\cos^2\phi}}$$

Con lo que terminamos la parte a)

Ahora queremos

$N(\phi = \pi/2)$, con $N = mL(\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\phi - \ddot{\phi}\cos\phi)$

tamos que $\cos(\pi/2) = 0$ por lo que solo necesitamos $\dot{\phi}(\phi = \pi/2)$

$$N(\phi = \pi/2) = mL \cdot \dot{\phi}^2(\phi = \pi/2)$$

$$= m\cancel{L} \cdot \frac{V_0^2}{\cancel{L^2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{1+\cos^2(\pi/2)}}\right)^2$$

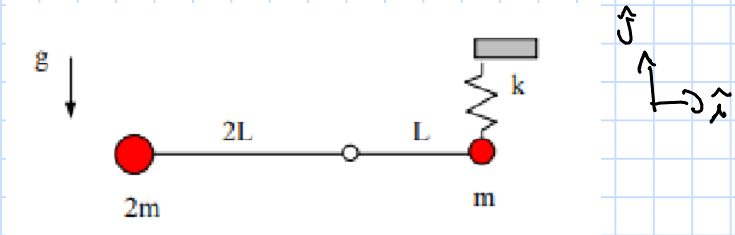
$$= m\frac{V_0^2}{L} \cdot 2 \Rightarrow N(\phi = \pi/2) = \frac{2mV_0^2}{L}$$

Newton

Analisis dimensional $[N] = [N] = [kg \cdot m/s^2] = \left[M \cdot \frac{L}{T^2}\right]$

$\left[\frac{2mV_0^2}{L}\right] = \left[M \cdot \frac{\frac{L^2}{T^2}}{L}\right] = \left[M \cdot \frac{L}{T^2}\right] = [N]$ Dimensionalmente correcto.

P2) Primero el sistema se encuentra horizontal y nos piden el estiramiento del resorte.



Tenemos que imponer que la suma de los torques sea 0. Como la masa de la izq es mas grande que la otra y sta mas lejos, esperamos que el resorte este ejerciendo una fuerza en $-\hat{j}$, entonces su torque sera negativo

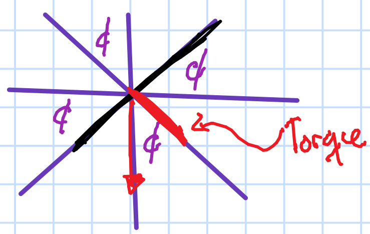
$$\sum \tau = (2m)g\cdot(2L) - mg\cdot L + \delta L \overset{!}{=} 0$$ ← imponemos

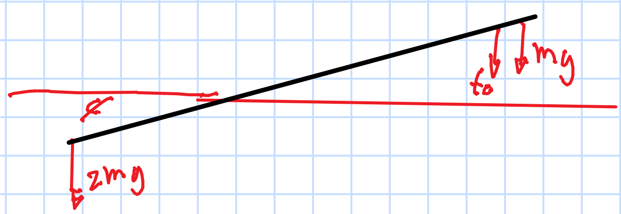
$$\Rightarrow +3mg + K\delta = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{-3mg}{k}}$$ → Analisis Dimensional

$[k] = [\frac{N}{m}]$, $[mg] = [N]$ $\Big\}$ $[\frac{mg}{k}] = [m]$ ✓

Nos da una compresión, como esperabamos

Ahora queremos perturbar ligeramente el sistema, tq





Para el resorte, tendremos que su compresión será $\delta - L\sin\theta$ el signo (-) porque δ es negativo y por como hicimos el dibujo, ahora el resorte esta mas comprimido que en el instante inicial, escribimos la ec de torque

$I_o \ddot{\phi} = \tau_{ext}$ y notamos que no hemos calculado la inercia...

$$I_o = \sum_i m_i r_i^2 = 2m\cdot(2L)^2 + m\cdot L^2 = 9mL^2 \text{, entonces}$$

$$\ddot{\phi}\, 9mL^2 = (2mg)\cdot 2L\cdot\cos\theta - mg\cdot L\cos\theta + (\delta - L\sin\theta)K\cdot\cos(\theta)$$

El coseno en la fza elástica viene porque si bien el resorte esta vertical, la barra no.

$$\ddot{\phi}\, 9mL^2 = (2mg)\cdot 2L\cdot \cos\theta - mg\cdot L\cos\phi + (\delta - L\sin\phi)K\cdot \cos\phi\, L$$

Queremos hacer P.O respecto a $\phi = 0$, entonces $\phi = 0 + \varepsilon$ con $\varepsilon << 1$

Entonces $\ddot{\phi} = \ddot{\varepsilon}$ $\quad \cos(\phi) \sim 1 \;\wedge\; \text{sen}(\phi) \sim \varepsilon$, así

$$\ddot{\varepsilon}\cdot 9m\cancel{L^2} = \cancel{4mgL - mgL + K\delta L} - K\cancel{L^2}\varepsilon$$

Punto de equilibrio

$$0 = \ddot{\varepsilon} + \frac{K}{9m}\varepsilon$$

Así la frecuencia de pequeñas oscilaciones es $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{9m}}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \quad T = 6\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

c) Ahora queremos la rapidez maxima cuando el resorte se corta

Para lo que volvemos a la ec de torque

$$\overset{3}{\cancel{9}}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = \cancel{3}\cancel{m}g\cancel{L}\cos\theta \qquad \text{/Truco de mecanica}$$

$$3\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{g}{L}\cos\theta \qquad \frac{\pi}{2} \text{ es donde la velocidad es maxima}$$

$$\int_{\dot{\theta}=0}^{\dot{\theta}}\dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \frac{g}{3L}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \quad \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{3L}\cdot\left(\sin\pi/2 - \sin(0)\right)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{3L}}$$

Por lo que la rapidez de la masa 2m será

$$V_{max} = 2L\cdot\sqrt{\frac{2g}{3L}}$$