Pauta Auxiliar 24

Profesor: Patricio Aceituno

Mau Rojas

Hoy

P1. **G.4 Guia Aceituno** Para este problema tenemos una condicion inicial donde ocurrira una colision. Luego de la colision las masas seguiran juntas y el sistema comenzara a rotar en torno al punto P, esto por conservacion de momentum lineal.

En el auxiliar opte por calcular la velocidad angular inicial $\dot{\phi}(t = t^*)$, tal que en t^* ocurre la colision al final, cuando lo necesitabamos, en esta pauta lo hare al principio. Primero veamos con que velocidad queda el sistema de las dos masas pegadas:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \tag{1}$$

$$-mv_o\hat{x} = 2m * \vec{v}_1 \implies \vec{v}_1 = \frac{v_o}{2}\hat{x} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Con lo que tenemos la velocidad de las dos masas que quedan pegadas. Ahora calculemos la velocidad del CM.

$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{\sum m_i}\sum_i m_i\vec{v}_i \tag{4}$$

$$= \frac{1}{6m}\left(2m \cdot \frac{v_o}{2}\hat{x}\right) \tag{5}$$

$$= \frac{v_o}{6}\hat{x} \tag{6}$$

Ahora para ver la velocidad angular en t^*, tenemos que sacar la componente perpendicular al $\vec{R}_{CM}$. Puesto que la otra componente es cancelada por el roce estatico, en el auxiliar cometi el error de decir que toda la velocidad seria tangencial, pero eso no es cierto. Vamos a tener una perdida. Para ver la componente que es velocidad tangenial, podemos notar que el angulo entre el eje x y $\vec{R}_{CM}$ es $\pi/6$, esto porque tiene que ser la mitad del angulo interno del triangulo, que es equilatero. Esto porque las masas son iguales, si no lo fueran entonces no estaria en el centro geometrico y el angulo seria otro.

Entonces la componente de la velocidad que es perpendicular al brazo es

$||\vec{V}_t|| = ||\vec{V}_{CM}|| \sin(\pi/6)$

Asi la velocidad angular será:

$$\dot{\theta}(t = 0) = \frac{||\vec{V}_{CM}|| \sin \pi/6}{||\vec{R}_{CM}||} \tag{7}$$

Donde calcularemos $\vec{R}_{CM}$ para poder calcular su norma. Para calcular $\vec{R}_{CM}$ necesitamos los vectores que apuntan a cada particula desde el origen. Tomaremos como origen el punto P, y etiquetaremos a la masa de arriba con el indice 1 y a la masa de la derecha con 2. Así:

$$\vec{r}_1 = b\cos(\pi/3)\hat{\imath} + b\sin(\pi/3)\hat{\jmath} = b/2\hat{\imath} + b\sqrt{3}/2\hat{\jmath} \tag{8}$$
$$\vec{r}_2 = b\hat{\imath} \tag{9}$$

Calculemos entonces el $\vec{R}_{CM}$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= \frac{1}{6m}\sum m_i\vec{r}_i & (10)\\ &= \frac{1}{6m}\left(2m(b/2\hat{\imath} + b\sqrt{3}/2\hat{\jmath}) + 2mb\hat{\jmath}\right) & (11)\\ &= \frac{1}{2}b\hat{\imath} + \frac{b\sqrt{3}}{6}\hat{\jmath} & (12)\end{aligned}$$

Ahora calculemos la inercia,

$$I = \sum m_i r_i^2 \tag{13}$$

Pero antes de hacer la sumatoria, notamos que $r_i^2 = \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = ||\vec{r}_i||^2$. Y en nuestro caso, tanto $\vec{r}_1$ como $\vec{r}_2$ son vectores de largo b. Por lo que $r_1^2 = r_2^2 = b^2$ Entonces:

$$I = 2mb^2 + 2mb^2 = 4mb^2 \tag{14}$$

Ahora queremos resolver la ecuacion:

$$I\ddot{\theta} = \tau_{ext} \tag{15}$$

Por lo que necesitamos encontrar los torques, como en el problema hay gravedad, ejerce torque. Y no hay mas fuerzas que hagan toque.

$$\begin{aligned} \tau_{mg} &= \vec{r} \times \vec{F} & (16)\\ &= \vec{R}_{CM} \times (-6mg\hat{\jmath}) & (17)\end{aligned}$$

Pero notamos que nuestro vector de centro de masa, es solo valido para el instante inicial, despues tenemos que va rotando. Para encontrarlo utilizaremos el vector que tenemos y lo multiplicaremos por una matiz de rotacion.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{18}$$

Asi tendremos $\vec{R}_{CM}(\theta) = R(\theta)\vec{R}_{CM}(0)$

$$\vec{R}_{CM}(\theta) = (b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta))\hat{\imath} + (b/2\sin(\theta) + \frac{b\sqrt{3}}{6}\cos(\theta))\hat{\jmath} \tag{19}$$

Ahora podemos calcular el torque:

$$\tau_{mg} = ((b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta))\hat{\imath} + (b/2\sin(\theta) + \frac{b\sqrt{3}}{6}\cos(\theta))\hat{\jmath}) \times (-6mg\hat{\jmath}) \tag{20}$$

$$= -6mg(b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta))\hat{k} \tag{21}$$

Con lo que podemos escribir la ecuacion de torque:

$$I\ddot{\theta} = \tau_{ext} \tag{22}$$

$$4mb^2\ddot{\theta} = -6mg(b/2\cos(\theta) - \frac{b\sqrt{3}}{6}\sin(\theta)) \tag{23}$$

$$4b\ddot{\theta} = -3g\cos(\theta) + \sqrt{3}g\sin(\theta) \tag{24}$$

Que es una ecuacion que podemos resolver integrando con el trucazo de mecanica. Por lo que necesitamos ver entre que instantes vamos a integrar, ya tenemos las condiciones iniciales, que son cuando ocurre el choque, por lo que nos falta determinar las condiciones finales, que serian cuando podemos decir que el sistema va a volcar. Si vemos el torque del peso, podemos notar que mientras el centro de masas tenga compoenente en el eje x positiva, entonces el toque va a evitar que vuelque, pues cuando la componente en el eje x del CM se vuelve 0, el toque es nulo y para un angulo un poco mas grande cambia de signo. Por lo que queremos encontar el θ_{crit}, que cumple que la componente en x del CM es 0. Entonces queremos

$$\frac{b}{2}\cos(\theta) - \frac{b}{6}\sqrt{3}\sin(\theta) = 0 \tag{25}$$

$$3\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 0 \implies \tan(\theta) = \sqrt{3} \tag{26}$$

$$\implies \theta_{crit} = \pi/3 \tag{27}$$

Y tambien, para que no vuelque, queremos que cuando $\theta = \theta_{crit}$, tengamos que la velocidad angular sea 0, ie $\dot{\theta}(\theta = \theta_{crit}) = 0$ Ahora que tenemos las condiciones iniciales y finales, podemos resolver la EDO.

$$4b\ddot{\theta} = -3g\cos(\theta) + \sqrt{3}g\sin(\theta) \tag{28}$$

$$4b\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -3g\cos(\theta) + \sqrt{3}g\sin(\theta) \tag{29}$$

$$4b\int_{\dot{\theta}=}^{\dot{\theta}=0}\dot{\theta}d\dot{\theta} = -3g\int_0^{\theta_{crit}}\cos(\theta)d\theta + \sqrt{3}g\int_0^{\theta_{crit}}\sin(\theta)d\theta \tag{30}$$

$$4b(0 - \frac{\dot{\theta}^2(0)}{2}) = -3g\sin(\pi/3) + \sqrt{3}g(1-\cos(\pi/3)) \tag{31}$$

$$-2b\dot{\theta}^2(0) = -3g\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}g/2 \tag{32}$$

$$-2b\dot{\theta}^2(0) = \sqrt{3}g(-3/2 + 1/2) \tag{33}$$

$$\dot{\theta}^2(0) = \sqrt{3}g/(2b) \tag{34}$$

Ahora reemplazamos el valor que tenemos para $\dot{\theta}(0)$, para lo que necesitamos $||\vec{R}_{CM}|| = \sqrt{(b/2)^2 + (b\sqrt{3}/2)^2} = b\sqrt{1/4 + 1/12} = b\sqrt{1/3}$
Entonces:

$$\frac{v_o^2}{36}\sin^2(\pi/6)\frac{3}{b^2} = \sqrt{3}g/(2b) \quad (35)$$

$$\frac{v_o^2}{4b^2} = 12\sqrt{3}g/(2b) \quad (36)$$

$$v_o = \sqrt{24b\sqrt{3}g} \quad (37)$$

Como pueden notar, este resultado es mayor al valor obtenido en el auxiliar, esto porque hay una cantidad de energia que se pierde con el roce estatico.

P2. Este problema es bonito por la alta simetria que tiene, el enunciado es bien claro, asi que empecemos por encontrar los $\vec{r}_i$. Eligire el origen en el pibote y enumeraré las particulas en sentido antihorario tal que :

$$\vec{r}_1 = -L\hat{i} \quad (38)$$

$$\vec{r}_2 = -l\hat{i} - 2L\hat{j} \quad (39)$$

$$\vec{r}_3 = L\hat{i} - 2L\hat{j} \quad (40)$$

$$\vec{r}_4 = L\hat{i} \quad (41)$$

El centro de masa esta ubicado claramente en $\vec{R}_{CM} = -L\hat{j}$, por la simetria del sistema. Calculemos la inercia:

$$I = \sum m_i r_i^2 = m(L^2 + L^2 + (2L)^2 + L^2 + (2L)^2 + L^2) \quad (42)$$

$$= 12mL^2 \quad (43)$$

Nuevamente tenemos que rotar nuestro $\vec{R}_{Cm}$, para que quede en funcion del angulo:

$$\vec{R}_{CM}(\theta) = R(\theta)\vec{R}_{CM}(0) \quad (44)$$

$$= L\sin(\theta)\hat{i} - L\cos(\theta)\hat{j} \quad (45)$$

Podemos calcular entonces el torque:

$$\tau_{mg} = (L\sin(\theta)\hat{i} - L\cos(\theta)\hat{j}) \times (-4mg\hat{j}) \quad (46)$$

$$= -4mgL\sin(\theta) \quad (47)$$

Con lo que podemos escribir la ecuacion de toque:

$$12mL^2\ddot{\theta} = -4mgL\sin(\theta) \tag{48}$$
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{3L}\sin(\theta) = 0 \tag{49}$$

Con lo que encontramos la ecuacion de movimiento para el sistema. Para la segunda parte nos piden la frecuencia de pequeñas oscilaciones, con lo que haremos $\sin(\theta) \simeq \theta$. (Taylor orden 1).Obteniendo la ecuacion:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{3L}\theta = 0 \implies \omega_{po} = \sqrt{\frac{g}{3L}} \tag{50}$$

P3. En este problema ambas masas son distintas, por lo que el centro de masas no esta en el punto medio y tendremos que calcularlo. Para esto tomamos el origen en el punto que esta en contacto con el suelo y calculamos:

$$||\vec{R}_{CM}|| = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 \cdot L + m_2 \cdot 0) \tag{51}$$
$$= \frac{m_1}{m_1+m_2} L = \eta L \tag{52}$$

Donde el vector va a estar apuntando en $\hat{e} = \cos(\phi)\hat{\imath} + \sin(\phi)\hat{\jmath}$, pero para este problema solo nos interesa la magnitud, pues la usaremos para tener los brazos de torque.

Si hacemos un DCL de la barra, en el eje y siente el peso de ambas masas y hay una normal con el suelo. En el eje x, esta la tension y el roce. Por lo que las eucaciones de Newton son:

$$N - (m_1+m_2)g = 0T - f_r = (m_1+m_2)a_o \tag{53}$$
$$\tag{54}$$

Donde decimos que el sistema esta acelerando en el eje x con aceleracion constante. De la ecuacion en el eje y tenemos $N = (m_1+m_2)g \implies f_r = (m_1+m_2)g\mu$ Ahora para que la barra se mantenga en esa posicion tan particular, necesitamos que la suma de torques sea 0, con trigonometria tendremos que los toques seran:

$$\tau_N = -N\cos(\phi)\eta L \tag{55}$$
$$\tau_T = T\sin(\phi)\eta L \tag{56}$$
$$\tau_{m_2 g} = m_2 g\cos(\phi)\eta L \tag{57}$$
$$\tau_{f_r} = -N\mu\sin(\phi)\eta L \tag{58}$$
$$\tau_{m_1 g} = -m_1 g\cos(\phi)(L - \eta L) \tag{59}$$
$$\tag{60}$$

Pero notamos que no tenemos el valor de la tension T, para lo cual hacemos el DCL de la masa M, donde tenemos que siente peso y tension, y debe estar cayendo con una aceleracion $-a_o$ pues esta conectada con la barra.Entonces:

$$-Ma_o = T - Mg \implies a_o = \frac{Mg - T}{M} \tag{61}$$

Reemplazando esta expresion para a_o en la ecuacion del eje x para la barra, tenemos:

$$-(m_1+m_2)g\mu + T = \frac{(m_1+m_2)(Mg - T)}{M} \tag{62}$$
$$-(m_1+m_2)(g\mu + g) = -T\left(\frac{m_1+m_2}{M}\right) \tag{63}$$
$$\frac{(m_1+m_2)g(\mu+1)}{\frac{m_1+m_2}{M}+1} = T \tag{64}$$

Ahora podemos sumar todos los toques:

$$0 = -(m_1 + m_2) g \cos(\phi) \eta L + T \sin(\phi) \eta L + m_2 g \cos(\phi) \eta L - (m_1 + m_2) g \mu \sin(\phi) \eta L - m_1 g \cos(\phi)(L - \eta L \tag{65}$$

$$0 = T \sin(\phi) \eta - (m_1 + m_2) g \mu \sin(phi) \eta - m_1 g \cos(\phi) L \tag{66}$$

$$0 = T - \lambda_1 \tag{67}$$

Donde $\lambda_1 = (m_1 + m_2) g \mu + \frac{m_1 g \cot(\phi)}{\eta}$ Ahora si reemplzamos el valor de T.

$$(m_1 + m_2) g (1 + \mu) = \lambda_1 \left(\frac{m_1 + m_2}{M} + 1 \right) \tag{68}$$

$$\left(\frac{(m_1 + m_2) g (1 + \mu) - \lambda_1}{(m_1 + m_2) \lambda_1} \right)^{-1} = M \tag{69}$$

Con lo que encontramos el valor de M, como pueden notar es un valor muy especifico, el resultado se puede desarrollar un poco mas para que quede mas bonito, pero ya esta en funcion de constantes conocidas.

Para calcular ahora lla fuerza que ejerce la barra sobre las particulas, debemos preguntarnos hacia donde apunta, si vemos la masa m_1 tendremos que esta siente peso, por lo que se "quiere"mover hacia abajo, y la barra se lo impide (hay una componente vertical), tambien tenemos que el sistema completo se mueve hacia la derecha, por lo que tambien tiene que haber una componente en esa direccion. Asi que la fuerza apunta hacia arriba y hacia la derecha. Haicendo un DCL de la masa m_1 en el eje vertical tendremos:

$$F_{ad} \sin(\phi) = m_1 g \implies F_{ad} = \frac{m_1 g}{\sin(\phi)} \tag{70}$$

Con lo que se acaba el problema c: