Pauta Aux 17

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

aquivamos

Vamos a trabajar un poco con el concepto de trabajo,

P1. Para resolver este problema, debemos elegir primero nuestros sistemas de referencia.Lo que me parece mas sensato es dejar ambos en el centro del aro, pero que uno gire con velocidad angular ω_o. Haciendo esto, tendremos $\vec{R} = 0$, lo que significa un termino menos. Lo siguiente que podemos hacer, sera buscar relaciones entre las coordenadas inerciales y las no inerciales. Si tomamos el eje $\hat{i}'$ tal que $\hat{k} = -\hat{i}'$, tendremos que los vectores $\hat{j}'$ y $\hat{k}'$ los podremos describir con las coordenadas polares inerciales. Como se muestra en la figura, inicialmente los podemos tomar alineados con los ejes $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Y luego pensamos que ha pasado un tiempo t para ver como han girado. Ahora si los descomponemos, notaremos que:

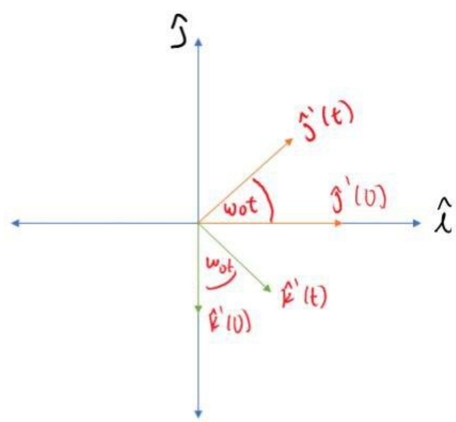

Figura 1: Ejes t=0 y t=t (visto desde arriba)

$$\hat{j}' = \cos(\omega_o t)\hat{i} + \sin(\omega_o t)\hat{j} = \hat{\rho} \tag{1}$$

$$\hat{k}' = \sin(\omega_o t)\hat{i} - \cos(\omega_o t)\hat{j} = -\hat{\phi} \tag{2}$$

$$\hat{i}' = -\hat{k} \tag{3}$$

Donde tambien escribimos la primera relacion . Como dijimos anteriormente, nuestro sistema no inercial va a rotar y por lo tanto $\vec{\omega} \neq 0$. O mejor dicho $\vec{\omega} = \omega_o \hat{k}$. Ahora lo que nos queda hacer es empezar la matraca, escribiremos la posicion, la velocidad y la aceleracion de la particula en el sistema no inercial.

$$\vec{r}' = R\cos(\phi)\hat{i}' + R\sin(\phi)\hat{j}' = -R\cos(\phi)\hat{k} + R\sin(\phi)\hat{\rho} \tag{4}$$
$$\vec{v}' = -R\sin(\phi)\dot{\phi}\hat{i}' + R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{j}' = R\sin(\phi)\dot{\phi}\hat{k} + R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{\rho} \tag{5}$$
$$\vec{a}' = -(R\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R\sin(\phi)\ddot{\phi})\hat{i}' + (R\ddot{\phi}\cos(\phi) - R\sin(\phi)\dot{\phi}^2)\hat{j}' \tag{6}$$
$$= (R\cos(\phi)\dot{\phi}^2 + R\sin(\phi)\ddot{\phi})\hat{k} + (R\ddot{\phi}\cos(\phi) - R\sin(\phi)\dot{\phi}^2)\hat{\rho} \tag{7}$$

Ahora que tenemos los terminos calculados por separado, podemos escribir las ecuaciones de movimiento: Nuestro punto de inicio es:

$$m\vec{a}_o + m\vec{a}' + m\dot{\vec{\omega}}_o \times \vec{r}' + m\vec{\omega}_o \times (\vec{\omega}_o \times \vec{r}') + 2m\vec{\omega}_o\vec{v}' = \vec{F} \tag{8}$$

Ya dijimos que $\vec{a}_o = 0$, $\vec{a}'$ ya lo calculamos, $\dot{\vec{\omega}} = 0$ pues gira con velocidad angular constante.Vamos por el siguiente termino. ie:

$$m\vec{\omega} \times (\vec{\omega}_o \times \vec{r}') = m\omega_o\hat{k} \times (\omega_o\hat{k} \times (-R\cos(\phi)\hat{k} + R\sin(\phi)\hat{\rho})) \tag{9}$$
$$= m\omega_o^2 R\sin(\phi)\hat{k} \times \hat{\theta} \tag{10}$$
$$= -m\omega_o^2 R\sin(\phi)\hat{\rho} \tag{11}$$

Ahora calculamos el siguiente termino:

$$mom\vec{e}ga_o \times \vec{v}' = 2m\omega_o\hat{k} \times (R\sin(\phi)\dot{\phi}\hat{k} + R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{\rho}) \tag{12}$$
$$= 2m\omega_o R\cos(\phi)\dot{\phi}\hat{\phi} \tag{13}$$

Lo siguiente que nos queda identificar son las fuerzas reales presentes. Podemos identificar que habra dos Normales, una que apunta hacia el centro del aro y la otra que apunta entrando o saliendo de la hoja ($\vec{N}_\phi$). Tambien hay peso, asi que lo incluimos.

$$\vec{F} = -N\cos(\phi)\hat{i}' - N\sin(\phi)\hat{j}' + N_\phi p\hat{h}i - mg\hat{k} \tag{14}$$

Ahora que tenemos todo lo que habia que calcular, podemos escribir las ecuaciones de movimiento. Dado que es una ecuacion vectorial, podemos elegir 3 vectores ortogonales y decir que la igualdad se debe cumplir en las 3 direcciones. En este caso por como he armado el problema, conviene tomar los vectores $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$.

En $r\hat{h}o$:

$$m(R\ddot{\phi}\cos(\phi) - R\sin(\phi)\dot{\phi}^2) - m\omega_o^2 R\sin(\phi) = -N\sin(\phi) \tag{15}$$

En $\hat{k}$:

$$m(R\ddot{\phi}\sin(\phi) + R\cos(\phi)\dot{\phi}^2) = N\cos(\phi) - mg \tag{16}$$

Finalmente en $\hat{\phi}$

$$2m\omega_o R\cos(\phi)\dot{\phi} = N_\phi \tag{17}$$

Ahora tomaremos la ecuacion (16) pasando el mg para el otro lado, Y asi podemos dividir la ecuacion (15) con la ecuacion (16) cambiada, y despues multiplicamos por el termino que queda en el denominador, obteniendo

$$m(R\ddot{\phi}\cos(\phi) - R\sin(\phi)\dot{\phi}^2) - m\omega_o^2 R\sin(\phi) = -\tan(\phi)\left(m(R\ddot{\phi}\sin(\phi) + R\cos(\phi)\dot{\phi}^2) + mg\right) \tag{18}$$

$$\ddot{\phi}\cos(\phi) - \sin(\phi)\dot{\phi}^2 - \omega_o^2\sin(\phi) = -\ddot{\phi}\sin(\phi)\tan(\phi) - \sin(\phi)\dot{\phi}^2 - \frac{g}{R}\tan(\phi) \tag{19}$$

Notamos que se va el termino $\dot{\phi}^2$, lo que es bueno, porque no tengo idea de como resolver esa ecuacion. Reescribiendo la ecuacion anterior:

$$\ddot{\phi}(\cos(\phi) + \sin(\phi)\tan(\phi)) - \omega_o^2\sin(\phi) = -\frac{g}{r}\tan(\phi) \tag{20}$$

$$\ddot{\phi}\,(\frac{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)}{\cos(\phi)}) + \omega_o^2\sin(\phi) = -\frac{g}{R}\sin(\phi) \tag{21}$$

$$\ddot{\phi} + \omega_o^2\sin(\phi)\cos(\phi) + \frac{g\sin(\phi)}{R} = 0 \tag{22}$$

Si queremos encontrar la velocidad en funcion del angulo, debemos integrar la ecuacion de movimiento, para lo cual utilizaremos el truco de mecanica.

$$\dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = \omega_o^2\sin(\phi)\cos(\phi) - \frac{g}{R}\sin(\phi) \tag{23}$$

Integramos:

$$\int_0^{\dot{\phi}}\dot{\phi}d\dot{\phi} = -\omega_o^2\int_{\pi/2}^{\phi}\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi - \frac{g}{R}\int_{\pi/2}^{\phi}\sin(\phi)d\phi \tag{24}$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = \omega_o^2\frac{\cos^2(\phi)}{2}\bigg|_{\pi/2}^{\phi} + \frac{g}{R}\cos(\phi)\bigg|_{\pi/2}^{\phi} \tag{25}$$

$$\dot{\phi}^2 = -\omega_o^2\cos^2(\phi) + \frac{g}{2R}\cos(\phi) \tag{26}$$

Ahora para la siguiente parte, volvemos a la ecuacion (22) y decimos que $\phi = 0 + \varepsilon$, con $\varepsilon \ll 1$. Asi las funciones trigonometricas, linealizadas son

$$\sin(\phi) = \sin(\varepsilon) \approx \varepsilon \tag{27}$$

$$\cos(\phi) = \cos(\varepsilon) \approx 1 \tag{28}$$

Asi la ecuacion de movimiento obtenida sera a orden lineal

$$\ddot{\varepsilon} + (-\omega_o^2 + \frac{g}{R})\varepsilon = 0 \tag{29}$$

Con lo que podemos responder que la frecuencia de pequeñas oscilaciones sera $\omega_{po} = \sqrt{-\omega_o^2 + g/R}$ Y la condicion que se debe cumplir es

$$\frac{g}{R} > \omega_o^2 \tag{30}$$

P2. Este problema, lo encuentro bonito porque usaremos materia de intro a la fisica que ustedes ya tienen muy dominada c:. Hay que resolver el problema con la aceleracion y sin la aceleracion.Resolvere el problema con la aceleracion y despues el otro.

Nuevamente tenemos que elegir nuestros sistemas de referencia, tomaremos primero uno inercial que este quieto y el no inercial estara acelerando con $\vec{a}_o = a_o\hat{i}$, En este caso el sistema no esta rotando y por lo tanto $\vec{\omega}_o = \vec{0}$. De manera que la ecuacion de movimiento que usaremos será:

$$m\vec{a}_o + m\vec{a}' = \vec{F} \tag{31}$$

Que es una ecuacion bastante simple, tenemos que tener ojo de que las masas son distintas, E_1 tiene masa $2m$ y E_2 tiene masa m.

Comenzaremos por escribir la ecuacion de movimiento para la esfera E_2.

$$m\vec{a}_o\hat{i} + ma_2\hat{j} = N\hat{i} + T\hat{j} - mg\hat{j} \tag{32}$$

Obteniendo las relaciones:

$$ma_0 = N \tag{33}$$
$$T = ma_2 + mg \tag{34}$$

Que son resultados conocidos, pues si bien el problema lo estamos resolviendo con sistemas no inerciales, tambien es posible resolverlo sin.

Ahora vamos a escribir la ecuacion para la esfera E_1, donde el sistema no inercial lo tomaremos chueco. De manera que $\hat{i}'$ apunte hacia arriba y la derecha y $\hat{j}'$ apunta hacia arriba y la izquierda. De manera que tenedremos la siguient ecuacion:

$$2ma_0\hat{i} + 2m(-a_2\hat{i}' + 0\hat{j}') = N\hat{j}' + T\hat{i}' - 2mg\hat{j} \tag{35}$$

Donde tenemos vectores con 'y vectores sin. Dado que hay que elegir uno de los sistemas, elegire el con ', utilizando las siguientes relaciones.

$$\hat{i} = \cos(\theta)\hat{i}' - \sin(\theta)\hat{j}' \tag{36}$$
$$\hat{j} = \sin(\theta)\hat{i}' + \cos(\theta)\hat{j}' \tag{37}$$

Reemplazando y separando por componentes tendremos:

$$2ma_o\cos(\theta) - 2ma_2 = ma_2 + mg - 2mg\sin(\theta) \tag{38}$$
$$-2ma_o\sin(\theta) = N - 2mg\cos(\theta) \tag{39}$$

De la relacion (30) podemos escribir

$$a_0 = \frac{1}{\cos(\theta)}\left(3a_2 + g - 2g\sin(\theta)\right) \tag{40}$$

Ahora necesitamos encontrar a_2, para lo cual utilizamos la informacion del acertijo de enunciado: a_2 es igual al doble de la aceleracion que tendria en el caso estatico, llamaremos a esa aceleracion a_3. Y la calcularemos. Del DCL de la esfera E_2 en el eje $\hat{j}$, será

$$ma_3 = T - mg \tag{41}$$

De donde tendremos una expresion para la tension $T = mg + ma_3$ Ahora vamos a la esfera E_2, tenemos que en el eje $\hat{i}'$, va a sentir la componente del seno. De manera que la ecuacion será:

$$-2ma_3 = T - 2mg\sin(\theta) \tag{42}$$
$$-2a_3 = g + a_3 - 2g\sin(\theta) \tag{43}$$
$$a_3 = \frac{1}{3}(-g + 2g\sin(\theta)) \tag{44}$$

Usando que $2a_3 = a_2$

$$a_0 = \frac{1}{\cos(\theta)}(6\cdot\frac{1}{3}(-g + 2g\sin(\theta)) + g - 2g\sin(\theta)) \tag{45}$$
$$= \frac{1}{\cos(\theta)}(-2g + 4g\sin(\theta) + g - 2g\sin(\theta)) \tag{46}$$
$$= \frac{3g}{\cos(\theta)}(2\sin(\theta) - 1) \tag{47}$$