Pauta Aux #2: Cinemática:

Resumen Previo:

En cinemática estudiaremos el cómo se mueven partículas puntuales, sin entrar en el por qué (todavía).

$$
\begin{tikzcd}
\vec{r}(t) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}"] & \vec{V}(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"] \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}"] & \vec{a}(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"]
\end{tikzcd}
$$

vector posición.   vector velocidad   vector aceleración.

⊛ Recordar: velocidad $\neq$ rapidez

$$\text{rapidez} \rightarrow V = |\vec{V}|$$

P1 $\vec{r}(t) = (a_1 \cos(\omega t),\ a_2 \operatorname{sen}(\omega t),\ 0)$

ⓐ Para encontrar la velocidad, simplemente derivamos:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1 \cdot \cos(\omega t) \\ a_2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \omega \cdot \operatorname{sen} \omega t \\ a_2 \omega \cdot \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

para derivar vectores ~~que están~~ (EN CARTESIANAS) derivamos cada coordenada por separado.

Para la aceleración, derivamos de nuevo:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -a_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ -a_2 \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{sen}(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

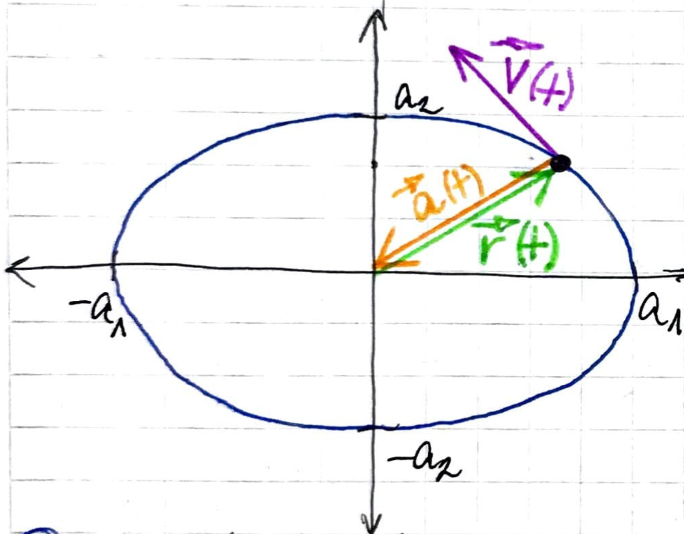
(b) Para encontrar el lugar geométrico, podemos fijarnos en que como ~~tenemos un~~ seno y un coseno, podemos intentar llegar a: $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$.

Tenemos: $x = a_1 \cos(wt)$, $y = a_2 \text{sen}(wt)$.

$$\frac{a_1^2 \cdot \cos^2(wt)}{a_1^2} + \frac{a_2^2 \cdot \text{sen}^2(wt)}{a_2^2} = 1$$

llegamos a que ~~es~~ una **ELIPSE**.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$$



- $\vec{r}(t)$ va del origen a la partícula.
- Para el sentido de $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$ nos fijamos en los signos de sus coordenadas.

(c) Calculemos la rapidez e igualémosla a alguna cte.

$$|\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 w^2 \cdot \text{sen}^2(wt) + a_2^2 w^2 \cdot \cos^2(wt)} = \text{cte}$$

$$a_1^2 \cdot \text{sen}^2(wt) + a_2^2 \cos^2(wt) = \text{otra cte.}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_1 = a_2.$$

Sería una circunferencia. $\vec{a}_t = 0$

$\vec{a}_c \neq 0$

P1 (b) ¿Cómo sé el sentido de el vector velocidad?

EXTRA.

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} -a_1 w \operatorname{sen}(wt) \\ a_2 w \cos(wt) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $wt = \pi/2$, por ejemplo; $\Rightarrow$ ⓐ $\operatorname{sen}(wt) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

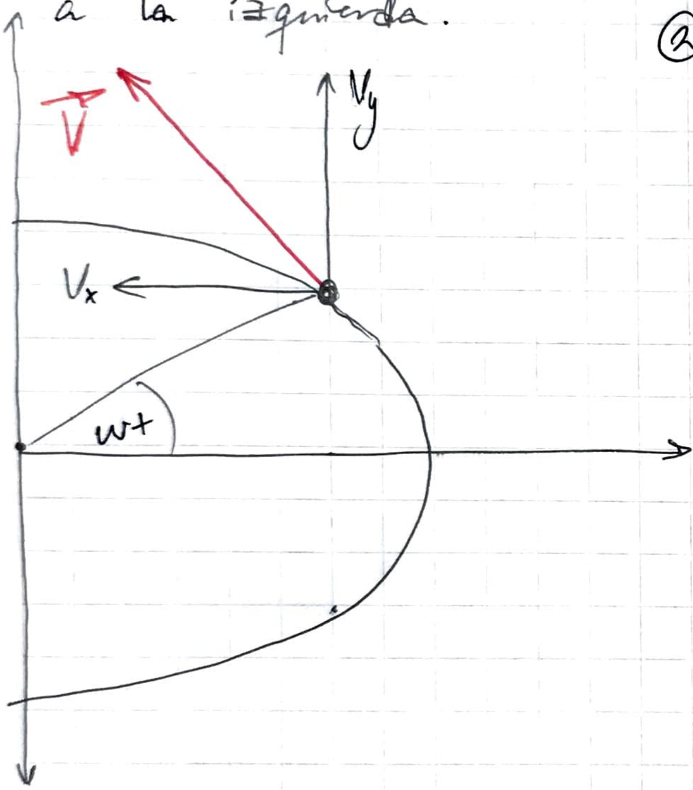
$\Rightarrow V_x = -a_1 w \operatorname{sen}(wt) < 0$

es decir, V_x apunta a la izquierda.

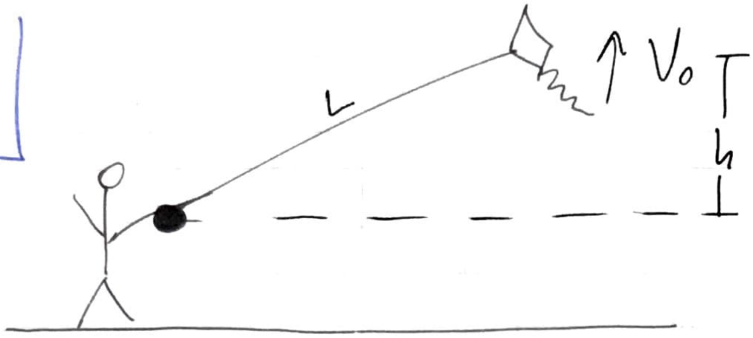
ⓑ $\cos(wt) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.

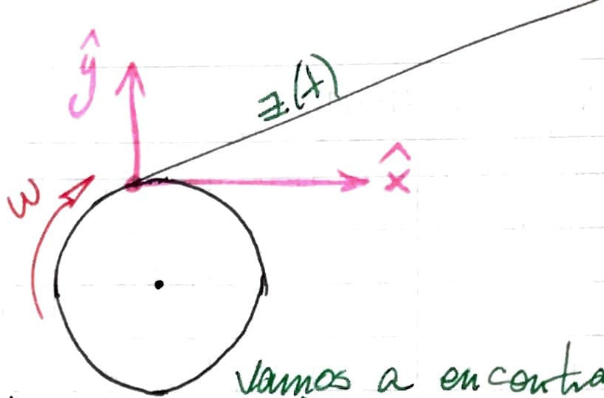
$\Rightarrow V_y = a_2 w \cos(wt) > 0$

V_y apunta hacia arriba.



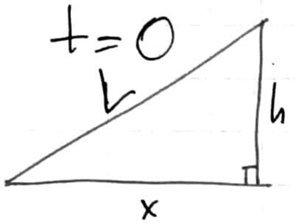
P2





$z(t)$: metros de hilo desenrollados. → Vamos a encontrar $\dot{z}(t)$ y luego usar $R\cdot\omega = \dot{z}$

$t=0$

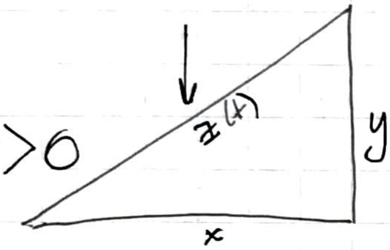


x es constante. $\dot{x} = 0$

Pitágoras: $x = \sqrt{L^2 + h^2}$

describo y con MRU: $y = h + V_0 t$.

$t>0$



Pitágoras de nuevo: $z^2 = x^2 + y^2$. $\Big/ \frac{d}{dt}$.

$$\cancel{2}\dot{z}z = \cancel{2\dot{x}}x + \cancel{2}\dot{y}y, \quad \dot{x}=0$$

derivar las restricciones geométricas ¡APAÑA!

$$\dot{z} = \frac{\dot{y}y}{z}$$

Pero ya sé que $y = h + V_0 t$, $\dot{y} = V_0$.

$$\Rightarrow \dot{z} = \frac{(h+V_0 t)\cdot V_0}{z}$$

Nos falta encontrar $z(t)$.

Pitágoras: $z^2 = x^2 + y^2 = (L^2 + h^2) + (h + V_0 t)^2 \;\Big/ \sqrt{\ }$

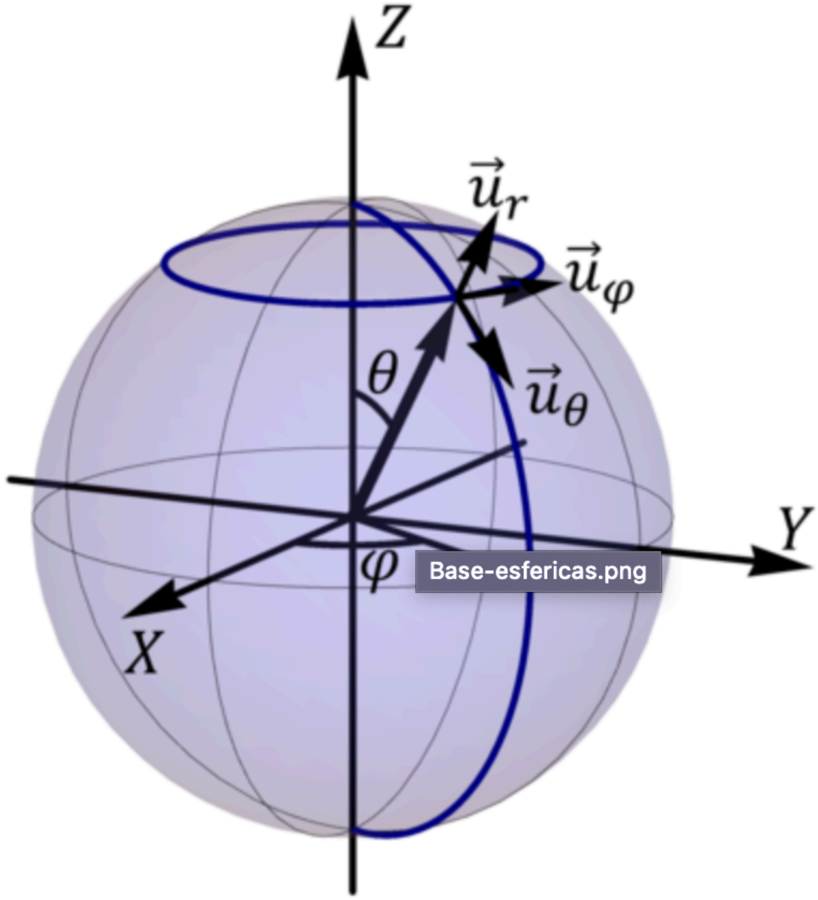
$$z = \sqrt{L^2 + 2h^2 + 2V_0 t h + V_0^2 t^2}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \frac{(h + V_0 t)\cdot V_0}{\sqrt{L^2 + 2h^2 + 2V_0 t h + V_0^2 t^2}}$$

$$R\cdot\omega = \dot{z} \Rightarrow \omega = \frac{\dot{z}}{R}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{(h + V_0 t)\cdot V_0}{\sqrt{L^2 + 2h^2 + 2V_0 t h + V_0^2 t^2}\cdot R}$$

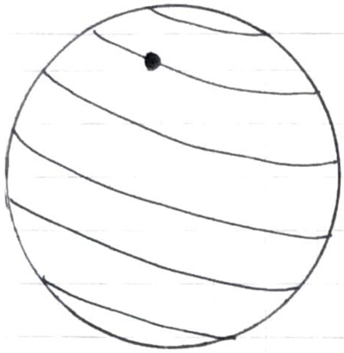
Coordenadas Esféricas:



Los vectores con u son los unitarios, lo mismo que los tongo

GIF: https://media.giphy.com/media/M7sAyfjvGZLtC/giphy.gif

P3

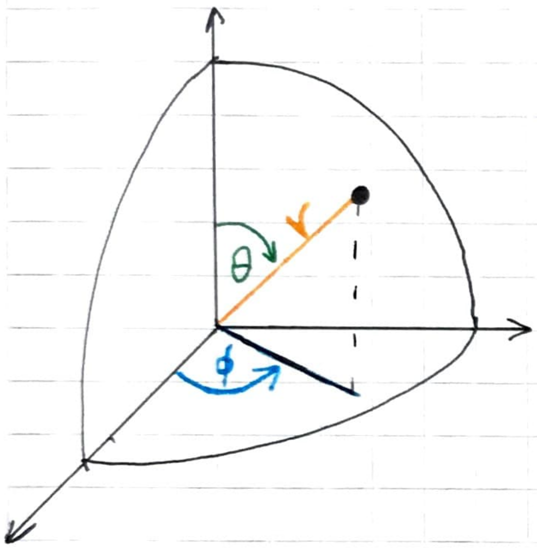


Coordenadas ESFÉRICAS:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \mathrm{sen}^2\theta)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\hat{\theta} + (r\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\phi}$$



$r = R$, $\phi = N\theta$

$\theta(t=0) = 0.$ $\quad \dot{\theta} = \omega_0$

ⓐ Escribir $\vec{v}$ y $\vec{a}$.

Tenemos que lograr rellenar lo sgte:

$r(t) = R$	$\theta(t) = \omega_0 t$	$\phi(t) = N\cdot\omega_0 t$
$\dot{r}(t) = 0$	$\dot{\theta}(t) = \omega_0$	$\dot{\phi}(t) = N\omega_0$
$\ddot{r}(t) = 0$	$\ddot{\theta}(t) = 0$	$\ddot{\phi}(t) = 0$

$\boxed{\hat{r}}$ Sabemos que $r(t) = R \Rightarrow \dot{r}(t) = \ddot{r}(t) = 0$

$\boxed{\hat{\theta}}$ Sabemos que $\dot{\theta} = \omega_0$ cte $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0.$

Para encontrar $\theta(t)$, integramos: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$ *

$$\int_0^{\theta} d\theta = \int_0^{t} \omega_0\, dt \Rightarrow \theta(t) = \omega_0 t.$$

pasamos multiplicando dt (sí, es legal).

$\boxed{\hat{\phi}}$ $\phi = N\theta = N\cdot\omega_0 t \Rightarrow \dot{\phi} = N\dot{\theta} = N\cdot\omega_0 \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$

Ahora, escribimos los vectores, guiándonos por sus expresiones en coordenadas esféricas:

$$\vec{V} = 0\hat{r} + R\cdot w_0\,\hat{\theta} + RNw_0\cdot \mathrm{sen}(w_0 t)\,\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = Rw_0\hat{\theta} + RNw_0\cdot\mathrm{sen}(w_0 t)\,\hat{\phi}}$$

$$\vec{a} = \left(0 - R\cdot w_0^2 - RN^2w_0^2\cdot\mathrm{sen}^2(w_0t)\right)\hat{r}$$
$$+\left(0+0-RN^2w_0^2\cdot\mathrm{sen}(w_0t)\cdot\cos(w_0t)\right)\hat{\theta}$$
$$+\left(0 + 0 + 2Rw_0\cdot Nw_0\cos(w_0t)\right)\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} = -Rw_0^2\begin{pmatrix}(1+N^2\cdot\mathrm{sen}^2(w_0t))\,\hat{r}\\ N^2\cdot\mathrm{sen}(w_0t)\cdot\cos(w_0t)\,\hat{\theta}\\ -2N\cdot\cos(w_0t)\,\hat{\phi}\end{pmatrix}}$$

ⓑ Radio de curvatura ρ_c cuando $\theta = \pi/2$.

$\theta = w_0 t = \pi/2$ reemplazamos.

$$\rho_c = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{a}\times\vec{V}\|}$$

$$\vec{V}(\theta=\pi/2) = Rw_0\left(\hat{\theta} + N\cdot\mathrm{sen}(\pi/2)\,\hat{\phi}\right) = Rw_0\left(\hat{\theta} + N\hat{\phi}\right)$$

$$\|\vec{V}\| = Rw_0\cdot\sqrt{1+N^2} \Rightarrow \boxed{\|\vec{V}\|^3 = R^3w_0^3\cdot\sqrt{1+N^2}^{\,3}}$$

$$\vec{a}\times\vec{V} = -Rw_0^2\cdot Rw_0\begin{vmatrix}\hat{r} & \hat{\theta} & \hat{\phi}\\ 0 & 1 & N\\ (1+N^2) & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$= -R^2w_0^3\begin{pmatrix}0\hat{r}\\ +N(1+N^2)\,\hat{\theta}\\ -(1+N^2)\,\hat{\phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\hat{r}\\ -R^2w_0^3N(1+N^2)\,\hat{\theta}\\ R^2w_0^3(1+N^2)\,\hat{\phi}\end{pmatrix}$$

$$\|\vec{a}\times\vec{V}\| = R^2w_0^3\sqrt{N^2(1+N^2)^2 + (1+N^2)^2} = R^2w_0^3(1+N^2)\sqrt{1+N^2}$$

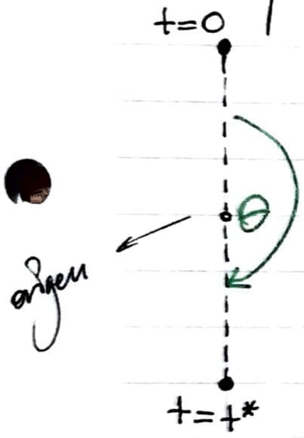
$$\|\vec{a}\times\vec{V}\| = R^2w_0^3\sqrt{(1+N^2)^3}$$

$$\rho = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{a} \times \vec{V}\|} = \frac{R^{\cancel{3}}\cancel{w_0^3}\cancel{\sqrt{1+N^2}^3}}{\cancel{R^2}\cancel{w_0^3}\cancel{\sqrt{1+N^2}^3}} = R$$

$$\boxed{\rho = R}$$

Ⓒ Longitud de la espiral y el tiempo en que la recorre.

La partícula recorrerá toda la espiral cuando: $\Theta = \pi$.



$$\Theta(t) = w_0 t. \Rightarrow \Theta(t^*) = w_0 t^* = \pi$$

$$\boxed{t^* = \frac{\pi}{w_0}}$$

Cálculo Diferencial: Longitud de Curva:

$$L(\Gamma) = \int_0^{t^*} \|\vec{V}\|\, dt = \int_0^{\pi/w_0} R w_0 \sqrt{1+N^2 \cdot \text{sen}^2(w_0 t)}\, dt$$

$$\|\vec{V}\| = R w_0 \sqrt{1 + N^2 \cdot \text{sen}^2(w_0 t)}$$

$$\boxed{L(\Gamma) = R w_0 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 + N^2 \cdot \text{sen}^2(\theta)}\, d\theta}$$

Hasta aquí es suficiente.

Si no recordamos esa integral de diferencial, no pasa nada.

La longitud de la curva no es nada más que la distancia total recorrida, y sabemos que integrando la rapidez se obtiene justo esto.