Pauta Aux 19

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

aquivamos

P1. Este problema es uno de los problemas de dos cuerpos mas intersantes que podemos ver, porque siento que muestra de una manera mas intuitiva como pasar al sistema de referencia del centro de masas puede entregarnos informacion interesante del sistema, sin tener que preocuparnos de las fuerzas internas.

- En el problema, tenemos que la masa de la izquierda ($2m$) parte quieta y la masa de la derecha tiene inicialmente rapidez v_o. Con la superficie hay roce, cinetico y estatico, con coeficientes μ_d y μ_e respectivamente. Cuando trabajamos con mas de una particula, hay mas grados de libertad, por lo que vamos a tener que usar mas ecuaciones que antes (por eso se ve energia primero).

  Lo primero que haremos sera hacer el DCL de la masa $2m$ pues es la que nos dara la condicion para que no se mueva.

  Haciendo el DCL, vemos que las fuerzas que siente son, la fuerza elastica, que la empuja hacia la izquierda y el roce estatico que apunta hacia la derecha, en el problema hay gravedad asi que tambien hay peso y una fuerza normal con el suelo. Escribimos entonces, por segunda ley de Newton

$$N - 2mg = 2ma_y = 0 \implies N = 2mg \tag{1}$$

$$-k\delta + f_{re} = 2ma_x \implies f_{re} = k\delta \tag{2}$$

  Donde usamos δ como la compresion del resorte. Notamos que la fuerza de roce estatico $f_{re} \leq N\mu_e$. Donde la igualdad se cumple cuando es maximo, que es el caso que nos interesa estudiar. Entonces:

$$2mg\mu_e = k\delta_{max} \implies \frac{2mg\mu_e}{k} = \delta_{max} \tag{3}$$

  Ahora con energia podemos obtener otra ecuacion. Inicialmente tenemos que el resorte esta en su largo natural, asi que no hay potencial elastica, para la potencial gravitatoria, tenemos que todo el movimiento ocurre a la misma altura asi que tampoco se considera y respecto a la energia cinetica, la particula de la derecha tiene velocidad v_o, por lo que esa seria la unica fuente de Energia.

$$E_i = \frac{1}{2}mv_o^2 \tag{4}$$

Ahora el instante ”final”, que usaremos sera cuando ambas masas esten quietas y el resorte se haya comprimido δ_{max} .

$$E_f = \frac{1}{2} k\delta_{max} \tag{5}$$

Ahora, no podemos hacer $E_i = E_f$ pues hay una fuerza disipativa, que es el roce cinetico en la masa que se esta moviendo. Podemos decir que la normal para la masa de la derecha es $N = mg$, ya lo hemos hecho suficientes veces, y por lo tanto el roce sera $\vec{f_{rd}} = mg\mu_d\hat{i}$, donde tenemos que apunta hacia la derecha. El trabajo que ejerce sera

$$W_{frd} = \int \vec{f_{rd}} \dot{\vec{d}} l \tag{6}$$

Donde $\vec{dl} = dx\hat{i} + dy\hat{j} = dx\hat{i}$. Asi

$$W_{frd} = \int mg\mu_d dx \tag{7}$$

$$= mg\mu_d \int_0^{-\delta_{max}} dx \tag{8}$$

$$= -mg\mu_d\delta_{max} \tag{9}$$

Donde tomamos el origen en la posicion inicial de la masa de la derecha, de manera que su posicion final es $-\delta_{max}$. Ahora por teorema de trabajo y energia

$$E_f - E_i = W \tag{10}$$

$$\implies \frac{1}{2} k\delta_{max}^2 - \frac{1}{2} mv_o^2 = -mg\mu_e\delta_{max} \tag{11}$$

$$\delta_{max}(\frac{1}{2} k\delta_{max} + mg\mu_d) = \frac{1}{2} mv_o^2 \tag{12}$$

$$\frac{2mg\mu_e}{k}(mg\mu_e + mg\mu_d) = \frac{1}{2} mv_o^2 \tag{13}$$

$$\frac{4mg^2}{k}\mu_e(\mu_e + \mu_d) = v_o^2 \tag{14}$$

$$2g\sqrt{\frac{m}{k}\mu_e(\mu_e + \mu_d)} = v_o \tag{15}$$

Con lo que tenemos que cualquier rapidez menor que v_o mantiene a la masa de la izquierda quieta.Con lo que terminamos la parte a.

- Ahora no hay roce y queremos encontrar el maximo estiramiento que alcanza el resorte en el movimiento resultante y la frecuencia con la que el resorte oscila. Tendremos que la Energia mecancia total es la misma que en la parte anterior

$$E_{MT} = \frac{1}{2} mv_o^2 \tag{16}$$

Donde MT significa mecanica total. Ahora para estudiar el problema, nos moveremos al centro de masa, podemos calcular su velocidad usando

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v}_i = \frac{1}{3m}(2m\cdot 0 + v_o m\hat{i}) = \frac{v_o}{3}\hat{i} \tag{17}$$

Si ahora hacemos un DCL al centro de masa, vemos que las fuerzas que actuan son la Normal y el peso en el eje $\hat{j}$, en el eje $\hat{i}$, no hay fuerzas y por lo tanto tenemos:

$$3m\ddot{x_{cm}} = 0 \implies \dot{x}_c m = cte. \tag{18}$$

Con lo que tenemos que el centro de masa se mueve con veloicidad constante, como inicialmente tiene velocidad $v_o/3\hat{i}$, mantendra esa velocidad por todo el movimiento c:

Ahora para tener la maxima compresion, tenemos que la Energia se repartira entre la energia del centro de masa y la Energia potencial elastica. Podemos ver esto como que queremos que toda la Energia que no usa el centro de masa para moverse con velocidad $v_o/3\hat{i}$ se ocure en comprimir el resorte, y asi:

$$E_{MT} = K_{cm} + U_{int} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{2}(3m)(\frac{v_o}{3})^2 + \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{20}$$

$$= \frac{1}{6}mv_o^2 + \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{21}$$

$$\implies \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{6}mv_o^2 + \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{22}$$

$$mv_o^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}k\delta^2 \tag{23}$$

$$\frac{2m}{3k}v_o^2 = \delta^2 \tag{24}$$

Con lo que tenemos una expresion para la maxima compresion.

Ahora queremos calcular la frecuencia con la que oscilan los resortes, para ello, usaremos el sistema de referencia inercial del centro de masa, de manera que para la particula A (izquierda), $x_A = -y\hat{i}$ y para la particula B $x_B = x\hat{i}$. Tenemos que la masa de la izquierda solo siente la fuerza elastica, por lo que escribimos:

$$m\ddot{x} = f_e \tag{25}$$

Si quiero escribir la fuerza elastica, recuerdo que la forma que tiene es $f_e = -k(l - l_o)$, donde l es el largo del resorte, que en este caso es $x + y$, por lo que tenemos:

$$m\ddot{x} = -k(x + y - l_o) \tag{26}$$

Pero como saco y? , bueno a esto me referia que vamos a necesitar mas ecuaciones, como estamos en el sistema de referencia del centro de masa, $\vec{R}_{CM} = \vec{0}$, y si escribimos su definicion

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{3m}(-2my\hat{i} + mx\hat{i}) \implies y = \frac{x}{2} \tag{27}$$

Que es una relacion que debe mantenerse para mantenernos en ese sistema de referencia, que es inercial pues se mueve a velocidad constante. Entonces desarrollamos

$$m\ddot{x} = -k(\frac{x}{2} + x - l_o) \tag{28}$$

$$m\ddot{x} = -k\frac{3x}{2} - l_o) \tag{29}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\frac{3}{2}x = \frac{k}{m}l_o \tag{30}$$

$$\implies \ddot{x}' + \frac{3k}{2m}x' = 0 \tag{31}$$

Donde para llegar a la ultima ecuacion hicimos un cambio de variable que sabemos que existe. Reconocemos la ecuacion obtenida como la del oscilador armonico y por lo tanto pa frecuencia seria

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}} \tag{32}$$

P2. En este problema tenemos dos masas m_1 y m_2, donde la masa m_1 esta arriba y la otra abajo. Estan unidas por un resorte de largo l_o y constante elastica k y el sistema se mantiene siempre vertical.

- En la primera parte nos piden la compresion minima δ, para que al liberar m_1 del reposo, la particula de masa m_2 se separe de la superficie. Con esa informacion, tenemos claro que vamos a tener que hacer que la Normal se haga 0. Veamos la euacion de movimiento en $\hat{j}$, para la masa m_2. Tenemos que sobre ella actua la Normal, la fuerza elastica y el peso, las primeras dos apuntan hacia arriba, eso no es cierto siempre, de hecho inicialmente la fuerza elastica apunta hacia abajo, pero queremos estudiar cuando la fuerza elastica puede levantar la masa por lo que en ese caso si apunta hacia arriba.

$$N + f_e - m_2 g = m_2\ddot{y} \tag{33}$$

$$N + k\delta - m_2 g = m_2\ddot{y} \tag{34}$$

Donde tenemos que δ es el estiramiento del resorte. Ahora nos ponemos en la situacion en la que justo se despega la masa m_2, en ese punto tenemos que $N = 0$ y $\ddot{y} = 0$ pues la Fuerza Neta es 0 y el cuerpo esta en reposo, por lo que se mantendra en reposo. Asi obtenemos:

$$k\delta_1 = m_2 g \implies \delta_1 = \frac{m_2 g}{k} \tag{35}$$

Donde usamos δ_1 para el estiramiento que tiene el resorte cuando la masa 2 se despega. Ahora tenemos que buscar una ecuacion para juntar δ_0 que es la compresion inicial con δ_1 que es el estiramiento al que queremos llegar, lo mas intuitivo es usar energia, asi que aqui vamos: Inicialmente tenemos que la masa 1 tendra energia Potencial gravitatoria, tomaremos el Suelo como nivel 0 de energia potencial, tambien hay energia elastica pues el resorte esta comprimido, y eso es todo. En el instante en que se despega la masa m_2, tenemos que como estamos buscando la compresion maxima, en ese punto la masa m_1 tendra velocidad nula pues si tuviera velocidad, entonces el resorte fue comprimido mas que lo minimo. La masa de arriba estara a una altura $h = l_o + \delta_1$ y el resorte estara estirado en δ_1. Escribimos entonces:

$$E_i = m_1 g(l_o - \delta_o) + \frac{1}{2}k\delta_o^2 \tag{36}$$

$$E_f = m_1 g(l_o + \delta_1) + \frac{1}{2}k\delta_1^2 \tag{37}$$

Si ahora aplicamos conservacion de energia:

$$m_1 g(l_o - \delta_o) + \frac{1}{2}k\delta_o^2 = m_1 g(l_o + \delta_1) + \frac{1}{2}k\delta_1^2 \tag{38}$$

$$\frac{1}{2}k\delta_o^2 - m_1 g\delta_o - m_1 g\delta_1 - \frac{1}{2}k\delta_1^2 = 0 \tag{39}$$

Donde tenemos una cuadratica donde la unica incognita es δ_o, por lo que se puede deicr que la solucion se tiene c:

- En la segunda parte, nos piden calcular la altura maxima que alcanza el centro de masa, si ahora la compresion es $2\delta_o$. Lo que haremos para resolver esto sera partir con Energia, tomando el instante inicial y el instante cuando la masa m_2 se despega del suelo. Porque despues de ese punto, la unica fuerza que se ejerce sobre el centro de masas es el peso y podemos resolver ese problema con cinematica. Entonces vamos allá: Inicialmente la energia sera, la potencial elastica y la potencial gravitatoria de la masa m_2. Asi:

$$E_i = m_1 g(l_o - 2\delta_o) + \frac{1}{2}k(2\delta_o)^2 \tag{40}$$

Y la energia "final":

$$E_f = m_1 g(l_o + \delta_1) + \frac{1}{2}k\delta_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \tag{41}$$

Donde vemos que ahora la masa m_1 si tiene energia cinetica, pues el resorte fue comprimido el doble que en la parte anterior. Notamos que si hacemos $E_i = E_f$, entonces podemos encontrar un valor para v_1, que es la unica incognita. Ahora que tenemos v_1, nos interesa calcular la velocidad del centro de masa en ese instante:

$$\vec{v}_{cmo} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m1 v_1 \hat{j} + m2 \cdot 0) \implies \vec{v}_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \hat{j} \tag{42}$$

Si ahora hacemos el DCL del centro de masa, cuando la masa m_2 ya se despegó: Tendremos que solo siente el peso, es decir:

$$-(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{y}_{cm} \implies -g = \ddot{y}_{cm} \tag{43}$$

Donde tenemos que es un movimiento con aceleracion constante e igual a $-g$, por lo que podemos escribir la ecuacion de itinerario como:

$$y_{cm}(t) = y_o + v_{cmo}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{44}$$

Donde $y_o = \frac{1}{m_1+m_2}(m1(l_o + \delta_1))$, donde la masa m_2 tiene altura $y_2 = 0$ en ese instante. Nos piden la altura maxima, por lo que debemos calcular cuando deja de subir, para lo que escribimos la relacion:

$$v_{cm}(t) = v_{cmo} - gt \implies t^* = \frac{g}{v_{cmo}} \tag{45}$$

Asi, la altura maxima que alcanza el centro de masa será $y_{cm}(t^*)$.

P3. Esta pregunta es muy estandar a solido rigido, la ecuacion principal que usaremos sera

$$I_0\ddot{\theta} = \tau_0^{ext} \tag{46}$$

Donde I_0 es la inercia y τ_0^{ext} son los torques externos. Primero calcularemos la Inercia, tomaremos como origen el punto donde el aro toca el suelo, asi:

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = m(\sqrt{2}R)^2 + m(2R)^2 + m(\sqrt{2}R)^2 = 8mR^2 \tag{47}$$

Ahora que tenemos la inercia, tenemos que calcular el torque, en este caso como hay gravedad, esta ejercera un torque, por lo que calcularemos $\vec{R}_{cm}$ para asi tener el torque:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m(R\hat{\rho} - R\hat{\theta}) + m2R\hat{\rho} + m(R\hat{\rho} + R\hat{\theta})}{3m} \tag{48}$$

$$\implies \vec{R}_{cm} = \frac{4R}{3}\hat{\rho} \tag{49}$$

Asi el torque del peso será:

$$\tau_g = \vec{R}_{cm} \times 3mg(-\cos(\theta)\hat{\rho} + \sin(\theta)\hat{\theta}) = 4Rmg\sin(\theta)\hat{k} \tag{50}$$

Con lo que podemos escribir:

$$8mR^2\ddot{\theta} = 4Rmg\sin(\theta) \tag{51}$$

Usando el truco de mecanica e integrando tenemos:

$$\int_0^{\dot{\theta}} 2R\dot{\theta}d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} g\sin(\theta)d\theta \tag{52}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g(1-\cos(\theta))}{R} \tag{53}$$

Y eso es todo lo que podemos avanzar por ahora, necesitamos mas ecuaciones, podemos aplicar la segunda ley sobre el centro de masas, para lo cual necesitamos la aceleracion del centro de masas:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{4R}{3}\hat{\rho} \tag{54}$$

$$\implies \frac{d}{dt}\vec{R}_{cm} = \frac{4R}{3}\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{55}$$

$$\implies \frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_{cm} = -\frac{4R}{3}\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \frac{4R}{3}\ddot{\theta}\hat{\theta} \tag{56}$$

Ahora que encontramos la aceleracion del centro de masa, tenemos que hay una normal en el punto de contacto y que por lo tanto apunta en direccion radial $\hat{\rho}$, una fuerza de roce en la coordenada angular y el peso, escribiendo entonces la segunda ley de Newton para el centro de masa tenemos:

$$3m\left(-\frac{4R}{3}\dot{\theta}^2\hat{\rho}+\frac{4R}{3}\ddot{\theta}\hat{\theta}\right)=N\hat{\rho}-f_r\hat{\theta}+3mg(-\cos(\theta)+\sin(\theta)\hat{\theta}) \tag{57}$$

Separando por componentes:

$$-4mR\dot{\theta}^2=N-3mg\cos(\theta) \tag{58}$$

$$4mR\ddot{\theta}=f_r+3mg\sin(\theta) \tag{59}$$

Si reemplazamos la ecuacion (53) en la ecuacion (58) obtenemos:

$$N=7mg\cos(\theta)-4mg \tag{60}$$

Y usando la ecuacion (51) en (59), tendremos que:

$$f_r=mg\sin(\theta) \tag{61}$$

Con lo que encontramos la normal y la fuerza de roce, lo siguiente a calcular son las fuerzas de adherencia (nombre elegante para normales) de la masa A cuando esta en $\theta=\pi/4$.

$$\vec{R}_A=R(\hat{\rho}-\hat{\theta}) \tag{62}$$

$$\implies \frac{d}{dt}\vec{R}_A=R\dot{\theta}(\hat{\rho}+\hat{\theta}) \tag{63}$$

$$\implies \frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_A=R(\ddot{\theta}-\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+R(\ddot{\theta}+\dot{\theta}^2)\hat{\theta} \tag{64}$$

Con lo que escribimos la segunda ley de Newton para la masa A:

$$m(R(\ddot{\theta}-\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+R(\ddot{\theta}+\dot{\theta}^2)\hat{\theta})=f_{ad\theta}\hat{\theta}+f_{ad\rho}\hat{\rho}+mg(-\cos(\theta)\hat{\rho}+\sin(\theta)\hat{\theta}) \tag{65}$$

Si ahora reemplazamos $\theta=\pi/4$, entonces:

$$\dot{\theta}^2=\frac{g(1-\frac{\sqrt{2}}{2})}{R} \tag{66}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{g\sqrt{2}}{4R} \tag{67}$$

Separando entonces por componentes, primero $\hat{\rho}$

$$mg\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-1\right))=f_{ad\rho}-mg\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{68}$$

$$\implies f_{ad\rho} = mg(\frac{5\sqrt{2}}{4} - 1) \tag{69}$$

Donde notamos que $f_{ad\rho} > 0$ esto porque debe compensar la fuerza centripeta que siente.

Ahora en $\hat{\theta}$:

$$mg\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = f_{ad\theta} + mg\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{70}$$

$$\implies f_{ad\theta} = mg(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}) \tag{71}$$

Notamos que $f_{ad\theta} < 0$ lo que tiene sentido pues el peso apunta en la direccion positiva en θ, de manera que esta fuerza lo compensa. Si quiero calular el modulo de la fuerza de adherencia lo puedo calcular como:

$$f_{ad} = \sqrt{f_{ad\rho}^2 + f_{ad\theta}^2} = mg\sqrt{\frac{25}{4} - 4\sqrt{2}} \tag{72}$$

Con lo que se acaba el problema c: