Pauta Tarea 4

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas y Edgardo Rosas

aquivamos

Vamos a trabajar un poco con el concepto de trabajo,

P1. Lo primero que podemos notar es que ambos movimientos son equivalentes, esto porque si bien el cuerpo B, esta atrapado entre dos paredes, las normales que ejercen se deben cancelar, porque si no no estaria girando con velocidad angular constante. (Si una de las dos normales fuera mas grande, entonces aceleraria en theta). Como son equivalente entonces podemos decir $v_o = \omega_o * 2l_o$. Notamos que la unica fuerza que hay es la elastica y esta en la coordenada radial.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - l_o) \tag{1}$$

Ahora imponemos orbita circular, ie $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y tambien $r = 2l_o$. Obteniendo la ecuacion:

$$m(2l_o)\dot{\theta}^2 = k(2l_o - l_o) \tag{2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{kl_o}{2ml_o} \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{2m}} \tag{4}$$

Donde tenemos que $\dot{\theta} = \omega_o$. Si queremos ahora, la velocidad, podemos usar $v_o = 2l_o * \omega_o \implies v_o = l_o\sqrt{\frac{2k}{m}}$ Con lo que terminamos la parte a).

Ahora hagamos la parte b) Como perturbamos radialmente, $\ddot{r}$ ya no sera igual a 0, y tendremos que ocupar la ecuacion en θ, para poder solucionar el sistema. Tendremos las ecuaciones:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - l_o) \tag{5}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Ahora si reescribimos, la ecuacion para θ de manera conveniente:

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{8}$$

Donde tenemos que $r \neq 0$, por lo que no hay problema con el $\frac{1}{r}$. Y podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{9}$$

Si la derivada temporal de una cantidad es 0, entonces la cantidad es constante, y podemos escribir

$$r^2\dot{\theta} = c \tag{10}$$

Donde podemos utilizar los datos de la parte a para encontrar la constante.

$$c = r_o^2\dot{\theta} = 4l_o^2\sqrt{\frac{k}{2m}} \tag{11}$$

Ahora que encontramos el valor de c, lo vamos a usar asi, y despues reemplazaremos cuando sea necesario. Podemos escribir entonces $\dot{\theta} = \frac{c}{r^2}$ Veamos ahora la ecuacion en $\hat{r}$.

$$m(\ddot{r} - r \cdot \frac{c^2}{r^4}) = -k(r - l_o) \tag{12}$$

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{k}{m}(r - l_o) \tag{13}$$

Ahora queremos hacer taylor en torno a $r = 2l_o$.

$$\frac{1}{r^3}\bigg|_{2l_o+\varepsilon} = \frac{1}{(2l_o)^3} - 3\frac{1}{r^4}\bigg|_{2l_o}\varepsilon + ... \tag{14}$$

Ahora usando que $r = 2l_o + \varepsilon \implies \ddot{r} = \ddot{\varepsilon}$

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{1}{(2l_o)^3}\,c^2 + 3\frac{c^2}{(2l_o)^4} = \frac{k}{m}(-\varepsilon - l_o) \tag{15}$$

Eliminando las constantes, pues son parte del equilibrio.

$$\ddot{\varepsilon} + 3\varepsilon\frac{c^2}{r_o^4} = -\varepsilon \tag{16}$$

$$\ddot{\varepsilon} = \varepsilon(\frac{3c^2}{r_o^4} + \frac{k}{m}) = 0 \tag{17}$$

Ahora usamos que $c = (2l_o)^2\sqrt{\frac{k}{2m}}$ y $r_o = 2l_o$. Asi,

$$\frac{3c^2}{r_o^4} = \frac{3k}{2m} \tag{18}$$

Asi nuestra ecuacion terminara siendo:

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{3k}{2m} + \frac{2k}{2m}\right) = 0 \tag{19}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{5k}{2m}\right) \tag{20}$$

Con lo que podemos concluir que $\omega_{po} = \sqrt{\frac{5k}{2m}}$

P2. En esta pregunta tenemos una fuerza central (direccion radial) de la forma.

$$\vec{F} = -\frac{k}{r}\hat{r} \tag{21}$$

Trabajaremos el problema en cilindricas, pero tambien se puede hacer en esféricas. Lo primero que nos piden es el potencial efectivo, por lo que podemos asumir que la fuerza viene desde un potencial, entonces se debe cumplir :

$$-\frac{k}{r} = -\frac{d}{dr}U \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Ahora tenemos que integrar, entre un punto de referencia r_o y r, así:

$$-\frac{k}{r} = -\frac{d}{dr}U \tag{24}$$

$$k\int_{r_o}^{r}\frac{1}{r} = \int_{r_o}^{r}\frac{d}{dr}\left(U\right)dr \tag{25}$$

$$k\ln(r) - kl\ln(r_o) = U(r) - U(r_o) \tag{26}$$

$$k\ln(r) = U(r) \tag{27}$$

Antes de escribir la Energia y reconocer el potencial efectivo, vamos a usar la ecuacion en θ para obtener la conservacion de momentum angular

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{28}$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0 \implies \frac{d}{d\theta}\left(r^2\dot{\theta}\right) \implies r^2\dot{\theta} = l \tag{29}$$

Con l una constante asociada al momentum angular, con lo que encontramos una expresion para reemplazar la velocidad angular:

$$\dot{\theta} = \frac{l}{r^2} \tag{30}$$

Ahora, escribamos la Energia

$$E = K + U \tag{31}$$

Donde K es el termino asociado a la energia cinetica y U el potencial.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{32}$$

Y cuanto vale la velocidad? , bueno en cilindricas sabemos que es:

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \tag{33}$$

Ahora que tenemos la velocidad, podemos decir que $\dot{z} = 0$, pues no hay fuerzas en ese eje y podemos decir que su velocidad inicial es 0, asi debe ser nula siempre.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + k\ln(r) \tag{34}$$

Reemplazando la conservacion de momentum angular:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{ml^2}{r^2} + k\ln(r) \tag{35}$$

Donde reconocemos el termino asociado al potencial efectivo

$$U_{eff} = \frac{ml^2}{2r^2} + k\ln(r) \tag{36}$$

Aca va un grafico del potencial efectivo .

El potencial diverge en infinito, esto hara que ninguna particula pueda escapar y siempre esten orbitando, con un radio minimo y un radio maximo. Tambien notamos que el potencial efectivo tiene un minimo local, por lo que tambien pueden haber orbitas circulares. Y no hay mas casos posibles.

Ahora buscamos la orbita circular calculando $\frac{dU_{eff}}{dr}$ e imponemos que sea igual a 0.

$$\frac{d}{dr}(U_{eff}) = -\frac{ml^2}{r^3} + \frac{k}{r} \tag{37}$$

$$-\frac{ml^2}{r^3} + \frac{k}{r} = 0 \tag{38}$$

$$kr_o^2 = ml^2 \tag{39}$$

$$r_o = l\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{40}$$

Ahora queremos encontrar la rapidez,

$$v_o = r_o\dot{\theta} \tag{41}$$

Ahora usaremos la consevacion del momento angular, para reemplazar $\dot{\theta}$:

$$v_o = l\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{l}{r_o^2} \tag{42}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{43}$$

Ahora procedemos a perturbar radialmente, para ello, lo resolvere con la ecuacion de movimiento, tambien se puede hacer con la segunda derivada del potencial efectivo evaluado en r_O.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{k}{r}m(\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3}) = -\frac{k}{r} \tag{44}$$

Como tenemos las funciones $1/r^3$ y $1/r$, vamos a tener que hacer un Taylor.

$$\left.\frac{1}{r^3}\right|_{r=r_o+\varepsilon} \approx \frac{1}{r_o^3} - 3\varepsilon\frac{1}{r_o^4} + \dots \tag{45}$$

$$\left.\frac{1}{r}\right|_{r=r_o+\varepsilon} \approx \frac{1}{r_o} - \varepsilon\frac{1}{r_o^2} + \dots \tag{46}$$

Tambien haremos el cambio de variable $r = r_o + \varepsilon \implies \ddot{r} = \ddot{\varepsilon}$

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{l^2}{r_o^3} + 3\varepsilon\frac{l^2}{r_o^4} = -\frac{k}{mr_o} + \varepsilon\frac{k}{mr_o^2} \tag{47}$$

Donde ahora las constantes se van pues estan evaluadas en el punto de equilibrio. Obteniendo

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{3l^2}{r_o^4} - \frac{k}{mr_o^2}\right) = 0 \tag{48}$$

Podemos desarrollar un poco mas el termino que multiplica a ε.

$$\frac{3l^2}{r_o^4} - \frac{k}{mr_o^2} = 3\frac{l^2}{l^4\left(\frac{m}{k}\right)^2} - \frac{k}{m}\frac{1}{l^2\frac{m}{k}} = \frac{3k^2}{m^2l^2} - \frac{k^2}{m^2l^2} = \frac{2k^2}{m^2l^2} \tag{49}$$

Obteniendo asi la ecuacion:

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\frac{2k^2}{m^2l^2} \tag{50}$$

De donde podemos obtener la frecuencia de pequeñas oscilaciones:

$$\omega_{po} = \sqrt{2}\frac{k}{ml} \tag{51}$$