Pauta Auxiliar 6

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas Y Edgardo Rosas

18 de abril de 2020

P1. Lo primero para resolver este problema, será el decidir donde poner el orgien, el lugar mas intuitivo va a ser en el punto medio entre A y B. Que corresponderia a el centro del circulo que se generaria completando el semicirculo. Dado que tenemos que el movimiento ocurre en un plano. Usaremos coordenadas polares, (si consideramos el eje $\hat{k}$ tendremos coordenadas cilindricas. El movimiento ocurre con $\rho = R$ constante. Por lo que podemos escribir la posicion, velocidad y aceleracion como:

$$\vec{r}(t) = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \tag{1}$$

$$= R\hat{\rho} + z\hat{k} \tag{2}$$

Para la velocidad, podemos derivar esa expresion, o partir de la definicion en cilindricas.

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k} \tag{3}$$

$$= R\dot{\theta}\hat{\theta} \tag{4}$$

Tenemos que solo hay velocidad en $\hat{\theta}$, lo que tiene sentido, dijimos que $\dot{z} = 0$ pues no hay movimiento en ese eje.

Finalmente la aceleracion será:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k} \tag{5}$$

$$= -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} \tag{6}$$

Reitero que ustedes tambien pueden simplemente derivar la expresion y no utilizar las formulas, es mas intuititvo incluso. Ahora que tenemos la aceleracion, tenemos que analizar cuales fuerzas hay presentes. Identificamos primero la fuerza de roce, que se opone al movimiento, como el movimiento ocurre en $\hat{\theta}$, el roce va a estar en la direccion $-\hat{\theta}$ y su magnitud es $f_{roce} = -\mu N\hat{\theta}$. Pero, ¿Cual normal es esa?.

Dado que el roce lo genera la pared y no el suelo, será la normal de la pared. Es por esto que usamos coordenadas cilindricas/polares. El vector normal a la pared será $\vec{N}_{pared} = -N\hat{r}$. Tambien tendremos una normal generada por el suelo porque la masa tiene peso, que será $\vec{N}_k = N_k\hat{k}$, tiene direccion positiva porque consideraremos $\vec{g} = -g\hat{k}$ No identificamos mas fuerzas en el problema, porque seguimos con la siguiente parte, utilizar la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{7}$$

$$-N_{pared}\hat{\rho} - N\mu\hat{\theta} + (N - mg)\hat{k} = m(R\ddot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}^2\hat{\rho}) \tag{8}$$

Donde tenemos que un vector es igual a otro, dado que los ejes son ortogonales, podemos separar esa ecuacion, en 3 ecuaciones, una por cada componente. Obteniendo

$$-N_{pared} = -mR\dot{\theta}^2 \tag{9}$$

$$-N_{pared}\mu = mR\ddot{\theta} \tag{10}$$

$$N - mg = 0 \tag{11}$$

La ecuacion (11), nos entrega el tipico resultado de $N = mg$ y no aporta informacion respecto a la dinamica, esto porque el movimiento ocurre en el plano XY.
De la ecuación (9) , tenemos una expresion para la normal de la pared, la podemos reemplazar en (10), obteniendo:

$$mR\ddot{\theta} = -mR\mu\dot{\theta}^2 \tag{12}$$

$$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\mu\dot{\theta}^2 \tag{13}$$

Para pasar de (12) a (13) utilizamos el truco de mecanica. Ahora dividimos por $\dot{\theta}^2$, que sabemos es dintinto de 0, porque si lo fuera no habria dinámica. Obtenemos

$$\int_{\dot{\theta}_o}^{\dot{\theta}} \frac{1}{\dot{\theta}} = -\int_0^{\theta} \mu d\theta \tag{14}$$

$$\ln\left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_o}\right) = -\mu(\theta - 0) \tag{15}$$

Dado que nos piden la velocidad con la que llega al final de la pared, queremos despejar $\dot{\theta}$, pues sabemos que $\dot{\vec{r}} = R\dot{\theta}$

Por otro lado, nos dimos una variable $\dot{\theta}_o$, que es la velocidad angular cuando el angulo $\theta = 0$, Sabemos que su velocidad en ese punto es v_o, por lo que $v_o = R\dot{\theta}_o \implies \dot{\theta}_o = \frac{v_o}{R}$, reemplazando esta informacion en (15), Tenemos:

$$\ln\left(\frac{R\dot{\theta}}{v_o}\right) = -\mu\theta \tag{16}$$

$$\frac{R\dot{\theta}}{v_o} = e^{-\mu\theta} \tag{17}$$

$$R\dot{\theta} = v_o e^{-\mu\theta} \tag{18}$$

Si ahora evaluamos en $\theta = \pi$, tendremos la velocidad cuando llega al punto B

$$v_B = v_o e^{-\mu\pi} \tag{19}$$

Con lo que tenemos lista la parte a). En la parte b), nos piden calcular el tiempo que tarda, por lo que volveremos a la ecuacion (18) e integraremos en el tiempo.

$$R\frac{d\theta}{dt} = v_o e^{-\mu\theta} \tag{20}$$

$$\frac{R}{v_o} e^{\mu\theta}\frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{21}$$

$$\frac{R}{v_o}\int_0^{\theta} e^{\mu\theta} = \int\limits_0^t dt \tag{22}$$

$$\frac{R}{v_o}\left(\frac{e^{\mu\theta}}{\mu} - \frac{1}{\mu}\right) = t - 0 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Ahora tenemos una ecuacion que nos dice el tiempo, a partir desde que pasa por el punto A, hasta que ha avanzado un ángulo θ. Como nos piden cuanto tarda en llegar al punto B, reemplazamos $\theta = \pi$ Así:

$$t_B = \frac{R}{v_o\mu}(e^{\mu\pi} - 1) \tag{25}$$

Con lo que encontramos el tiempo que tarda y con eso se acaba el problema c:

P2. Este es un problema muy clásico de roce viscoso, mas aún veremos diferencias entre dos tipos de roce viscoso. Conceptualmente tenemos que entender que el roce viscoso, a diferencia del estático o el cinético, no depende de la Normal sino que de la velocidad a la que se mueve el objeto afectado. Antes de empezar a resolver el problema haremos ciertas anotaciones respecto a este tipo de roce, $\vec{F}_r = -\gamma\vec{v}$.

Cuando nosotros hagamos Newton a un sistema y haya que considerar la fuerza de roce, es importante notar que la fuerza viene de por si con su signo y cambia automáticamente cuando el objeto cambia de dirección. Esto porque en su definición, el roce viscoso apunta en dirección contraria a la velocidad. Es el tipo de fuerza en la que uno toma su definicion, y la ubica en la ecuacion $\vec{F} = m\vec{a}$, en el lado de las fuerzas, bueno, esa es la introducción, ahora procedamos a resolver el problema.

Tenemos una particula que se mueve con velocidad inicial v_o, que no cambia en el tiempo porque no hay razones para que lo haga, una vez que entra en el medio gaseoso, empieza a afectarlo una fuerza de roce viscoso. $\vec{F} = -\gamma v^n \hat{\imath}$, en este caso, la velocidad esta solo en el eje x, y por lo tanto el roce viscoso apunta en la direccion negativa en el eje x. En el problema nos piden comparar los casos $n = 1$ y $n = 2$ y ver que ocurre con la particula en el tiempo.

Caso $n = 1$:

Para este problema utilizaremos coordenadas cartesianas porque el movimiento ocurre en una dimension y mas particularmente en una línea recta. Identificamos las fuerzas presentes, Tendremos el peso $F_g = -mg\hat{\jmath}$ y una fuerza normal $F_n = N\hat{\jmath}$, en el eje x, tendremos la fuerza de roce viscoso $F_r = -\gamma v\hat{\imath}$. No veo que hayan mas fuerzas presentes, tambien podemos notar que al aplicar la segunda ley de Newton en el eje y:

$$m\ddot{y} = \sum F_y \tag{26}$$
$$m\ddot{y} = N - mg \tag{27}$$
$$N = mg \tag{28}$$

Como la particula no se mueve en el eje y, tenemos que $\ddot{y} = 0$, de esta forma obtenemos que la normal es igual a mg, esto, no sirve para nada en el problema, y eso esta bien, el profesor gusta de poner gravedad en problemas donde no se utiliza luego en los calculos, no se distraigan, y si lo hacen, no se frustren, no siempre será necesaria c:.

Ahora poniéndonos serios, hagamos la suma de fuerzas en el eje x

$$m\ddot{x} = \sum F_x \tag{29}$$
$$m\ddot{x} = -\gamma v_x \tag{30}$$
$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \tag{31}$$
$$\tag{32}$$

Ahora tenemos una EDO que podemos resolver para $\dot{x}$

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} \tag{33}$$
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x} \tag{34}$$
$$\int_{v_o}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\frac{\gamma}{m}\int_{t_o}^{t} dt \tag{35}$$
$$\ln\frac{\dot{x}}{v_o} = -\frac{\gamma}{m}(t - t_o) \tag{36}$$
$$\frac{\dot{x}}{v_o} = e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{37}$$
$$\dot{x}(t) = v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{38}$$
$$\tag{39}$$

Con esto tenemos una expresión para la velocidad en función del tiempo para el caso $n = 1$, notamos que cuando $t \to \infty \implies \dot{x} \to 0$. Con esto sabemos que al menos en el infinito, la partícula va a dejar de avanzar, pero eso queda lejos y a mi me gustaria saber concretamente hasta donde avanza, de manera que a partir de la ecuacion obtenida, calcularemos su posición.

$$\dot{x} = v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{40}$$
$$\frac{dx}{dt} = v_o\, e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \int_0^x dx = v_o \int_{t_o}^{t} e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)} \tag{41}$$
$$x(t) = v_o\frac{m}{\gamma}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t_o)}) \tag{42}$$

Ahora podemos ver que cuando $t \to \infty \implies x \to \dfrac{v_o m}{\gamma}$ (En este problema asumimos que el gas comienza en $x = 0$, y que la particula pasa por ahi en $t = t_o$) De manera que vemos que la distancia que puede avanzar la particula frente a este tipo de roce viscoso esta acotada.

Caso $n = 2$:

Para este caso no haremos la suma en el eje y, es igual de inútil que en el caso anterior, partimos de inmediato con la segunda ley de Newton en el eje x.

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^2 \tag{43}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\gamma}{m}\dot{x}^2 \tag{44}$$

$$\int_{v_o}^{\dot{x}} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}^2} = -\frac{\gamma}{m}\int_{o}^{t} dt \tag{45}$$

$$\frac{1}{v_o} - \frac{1}{\dot{x}} = -\frac{\gamma}{m}t \tag{46}$$

$$\frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t \tag{47}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \tag{48}$$

Ahora vemos que nuevamente cuando $t \to \infty \implies \dot{x} \to 0$ Veremos que pasa con la posición.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \tag{49}$$

$$\int_{0}^{x} dx = \int_{0}^{t} \frac{1}{\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t} \tag{50}$$

$$x(t) = \frac{m}{\gamma}(\ln\left(\frac{1}{v_o} + \frac{\gamma}{m}t\right) - \ln\frac{1}{v_o}) \tag{51}$$

Notamos que ahora cuando $t \to \infty \implies x \to \infty$ Es decir, la particula no deja de avanzar.