Guia Mecanica

2020

1 Cinematica - Sistemas de Coordenadas

La idea es encontrar $\vec{r}$,$\vec{v}$, $\vec{a}$, etc en distintos sistemas de coordenadas, utilizando distintas variables $(t, \vec{r}, etc)$

1.1 Resumen

- Cartesianas
  - $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \longleftarrow$ Vector posicion
  - $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{i} + \dot{y}(t)\hat{j} + \dot{z}(t)\hat{k} \longleftarrow$ Vector velocidad
  - $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\hat{i} + \ddot{y}(t)\hat{j} + \ddot{z}(t)\hat{k} \longleftarrow$ Vector aceleracion

    $\rightarrow$ Los 3 vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ Son **ctes.** e independientes entre si

- Cilìndricas

$\hat{r} = |\hat{r}|(cos(\theta)\hat{i} + sin(\theta)\hat{j}) = cos(\theta)\hat{i} + sin(\theta)\hat{j}$
$\hat{\theta} = |\hat{\theta}|(-sin(\theta)\hat{i} + cos(\theta)\hat{j}) = -sin(\theta)\hat{i} + cos(\theta)\hat{j}$
$x = rcos(\theta)$; $y = rsin(\theta)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$z = z$

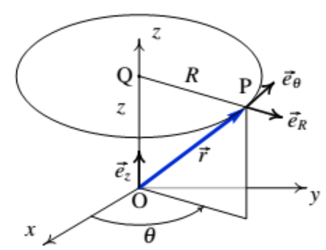

Figure 1: Representacion Grafica Cilíndricas

  - $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r} + z(t)\hat{k}$
  - $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r} + r(t)\dot{\hat{r}} + \dot{z}\hat{k}$, pero $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}(-sin(\theta)\hat{i} + cos(\theta)\hat{j} = \dot{\theta}\hat{\theta})$

    $\implies \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r} + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\theta} + \dot{z}(t)\hat{k}$
  - $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = \ddot{r}(t)\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + \ddot{z}\hat{k}$,

    pero $\dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta}(cos(\theta)\hat{i} + sin(\theta)\hat{j} = -\dot{\theta}\hat{r}$

    $\implies \ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$

- Polares ; Es un caso particular de cilindricas, con $z = 0 \iff \dot{z} = \ddot{z} = 0$, i.e..
  - $\vec{r}(t) = r(t)\hat{r}$
  - $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\hat{r} + r(t)\dot{\theta}(t)\hat{\theta}$
  - $\ddot{\vec{r}} = \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$

- Coordenadas Esfericas

En este caso ubicaremos a la partícula en la superficie de una esfera de radio **r**
Para lo cual

- θ : ángulo que varía entre 0 y π
- ϕ : ángulo que varia entre 0 y 2π
- $x = rsin(\theta)cos(\phi)$
- $y = rsin(\theta)\sin(\phi)$
- $z = rcos(\theta)$

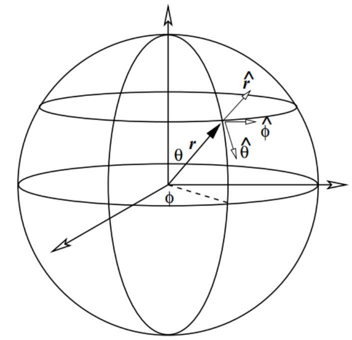

Figure 2: Representacion Grafica Esféricas

* $\hat{r} = sin(\theta)\cos(\phi)\hat{i} + sin(\theta)sin(\phi)\hat{j} + cos(\theta)\hat{k}$
* $\hat{\theta} = cos(\theta)cos(\phi)\hat{i} + cos(\theta)sin(\phi)\hat{j} - sin(\theta)\hat{k}$
* $\hat{\phi} = -sin(\phi)\hat{i} + cos(\phi)\hat{j}$

$\implies$ $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}sin(\theta)\hat{\phi}$; $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r} + \dot{\phi}cos(\theta)\hat{\phi}$; $\dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}sin(\theta)\hat{r} - \dot{\phi}cos(\theta)\hat{\theta}$, luego

- $\vec{r}(t) = r\hat{r} \longleftarrow$ vector posición
- $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}sin(\theta)\hat{\phi} \longleftarrow$ vector velocidad
- $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 sin^2(\theta) - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 sin(\theta)cos(\theta) + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} + (2\dot{r}\dot{\phi}sin(\theta) + r\ddot{\phi}sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}cos(\theta))\hat{\phi}$

- Coordenadas Intrínsecas:

  Coordenadas "naturales" para trabajar con una particula que se mueve, la velocidad siempre apunta en dirección tangencial a la trayectoria.

  - $s = s(t)$ trayectoria
  - $\vec{v}(t) = v(t)\hat{t} = \dot{s}\hat{t} \longleftarrow$ velocidad
  - $\vec{a}(t) = \dfrac{d}{dt}(v(t)\hat{t}) = \dot{v}(t)\hat{t} + v(t)\dfrac{d\hat{t}}{dt}$, pero $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$, con $\hat{t} = \hat{t}(s) \implies \dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dot{s}\dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dot{s}\dfrac{1}{\rho}\hat{n}$, donde ρ se define como radio de curvatura, entonces:
    $\vec{a}(t) = \dot{v}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}\hat{n} = \ddot{s}\hat{t} + \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, con $\vec{a}_t$ la aceleración tangencial y $\vec{a}_n$ la aceleración normal.

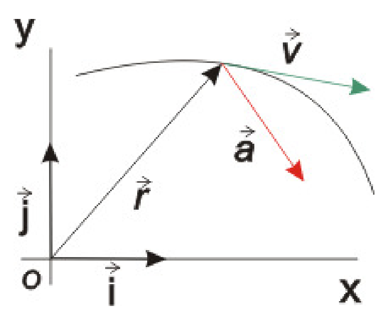

Figure 3: Representacion Grafica Intrínsecas

¿Cómo calcular ρ?.

Sabemos que: $\vec{a}(t) = \dot{v}\hat{t} + \dfrac{v^2}{\rho}$ & $\vec{v}(t) = v\hat{t} \implies$

$$
\begin{aligned}
||\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)|| &= ||(\dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}) \wedge v\hat{t}|| \\
&= ||\frac{v^3}{\rho}(\hat{n}\hat{t}|| \\
&= \frac{v^3}{\rho} = \frac{||\vec{v}||^3}{\rho}
\end{aligned}
$$

, luego $\rho = \dfrac{||\vec{v}||^3}{||\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)||}$

Ahora podemos pasar tranquilamente a los problemas c: