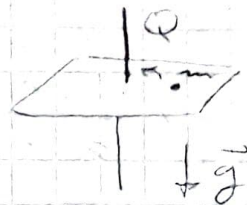


P11. $U(r) = -\frac{Qq}{L} \ln\left(\frac{r}{L}\right)$



$$\begin{aligned} F &= -\nabla U \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{Qq}{L} \ln\left(\frac{r}{L}\right) \right) \hat{r} \\ &= \frac{Qq}{L} \frac{\partial}{\partial r} \ln\left(\frac{r}{L}\right) \hat{r} \\ &= \frac{Qq}{L} \cdot \frac{1}{\left(\frac{r}{L}\right)} \cdot \frac{1}{L} \hat{r} = \frac{Qq}{Lr} \hat{r} \\ &= \text{cte.} \end{aligned}$$

Como la fuerza es radial y constante, se conserva el momento angular:

$$l_0 = \text{cte} = m r^2 \dot{\theta} (*) \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l_0}{m r^2}$$

$\Rightarrow$ Ecuación de movimiento: $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{|Qq|}{Lr}$

Imponemos $|Qq|$ ya que al tener $\pm$ carga, tienen distinto signo.

$$\therefore \ddot{r} = \frac{r\dot{\theta}^2}{m} - \frac{|Qq|}{mLr} = \frac{l_0^2}{m^2 r^3} - \frac{|Qq|}{mLr}$$

simplificamos (*)

$$\boxed{\ddot{r} = \frac{l_0^2}{m^2 r^3} - \frac{|Qq|}{mLr}}$$

Ecuación de movimiento

Para la posición de equilibrio pedimos que:
 pequeñas oscilaciones

$$\ddot{r} = G(r)$$

La expansión de Taylor es: $G(r) = G(r_{eq}) + G'(r_{eq}) \cdot (r - r_{eq})$

$$\therefore \ddot{r} = \left(\frac{l_0^2}{m^2 r_0^3} - \frac{|Qq|}{mLr_0} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{l_0^2}{m^2 r^3} - \frac{|Qq|}{mLr} \right) \bigg|_{r=r_0} \cdot (r - r_0)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{l_0^2}{m^2 r^3} \right) = \left(\frac{l_0}{m} \right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{r^4} \right) = \frac{-3l_0^2}{m^2 r^4}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{|Qq|}{mLr} \right) = \frac{|Qq|}{mL} \cdot \left(\frac{-1}{r^2} \right) = \frac{-|Qq|}{mLr^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = \left(\frac{l_0^2}{m^2 r_0^3} - \frac{|Qq|}{mLr_0} \right) + \left(\frac{-3l_0^2}{m^2 r_0^4} + \frac{|Qq|}{mLr_0^2} \right) (r - r_0)}$$

En equilibrio: $\ddot{r} = 0$
 $r = r_0$

$$\therefore \frac{l_0^2}{m^2 r_0^3} - \frac{|Qq|}{mLr_0} = 0 \Rightarrow \boxed{r_0 = l_0 \sqrt{\frac{L}{|Qq|/m}}}$$

Si reemplazamos

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \left(\frac{-3k_0^2}{m^2 r_0^4} + \frac{1/Q_9}{m L r_0^2} \right) (r - r_0) \\ &= \left(\frac{-3k_0^2}{m^2} \cdot \frac{1/Q_9}{L^2 r_0^4} + \frac{1/Q_9}{m L} \cdot \frac{1/Q_9}{L^2 L} \right) (r - r_0) \\ &= \left(\frac{-3(1/Q_9)^2}{(k_0 L)^2} + \frac{1/Q_9}{(k_0 L)^2} \right) (r - r_0) \\ &= \underbrace{-2(1/Q_9)^2}_{\frac{k_0^2 L^2}{2}} (r - r_0) \\ \Rightarrow \ddot{r} + \omega_0^2 r &= at.\end{aligned}$$

$$\omega_0 = \sqrt{2} \frac{1/Q_9}{k_0 L} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\sqrt{2}\pi k_0 L}{1/Q_9} \quad \checkmark$$

72



$$r = L$$

$$\dot{r} = \dot{r}^0 = 0$$

Para pequeños oscilaciones

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\dot{\theta}^3}{3!} + \frac{\dot{\theta}^5}{5!} - \dots$$

$$\approx 0$$

$$\therefore \sin \theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad \checkmark$$

oscilaciones

$$\frac{L}{\omega_0^2} \rightarrow \left[\frac{1}{5^2} \right]$$

$$\ddot{x} + \frac{L}{\omega_0^2} x = 0 \quad m$$

$$\therefore \text{Solución: } \theta(t) = A \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} t) + B \sin(\sqrt{\frac{g}{L}} t)$$

Si las condiciones iniciales son $\theta(0) = \theta_{\max}$ y $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{\max} \cos(\sqrt{\frac{g}{L}} t)$$

Para discusión: ¿Qué puntos hay de equilibrio en el péndulo que no son? ¿dado por pequeñas oscilaciones?

P3 / Aplicación oscilador armónico cuántico:
partículas diatómicas. (H_2 , HCl)

↳ observación de
interferencias

Cuantos: energías discretas.

Oscilador Armónico: sistema que va y viene
hacia su posición de equilibrio describiendo
ondas sinusoidales.