

P1]  $\vec{a} = k\sqrt{x}\vec{i} + 4\vec{j}$  con  $k > 0$  y condiciones iniciales:  $\vec{x}(0) = 0$   
 $\vec{v}(0) = 0$

En el eje  $x$ :  $\vec{a}_x = k\sqrt{x}\vec{i}$

$$\Leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$= \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$= \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{k\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x}$$

$$\therefore k\sqrt{x} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} \quad \text{resolvamos} \quad k\sqrt{x} \cdot dx = \dot{x} d\dot{x} \quad \int \text{integrando}$$

$$\Leftrightarrow \int k\sqrt{x} dx = \int \dot{x} d\dot{x}$$

$$\Leftrightarrow k \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{\dot{x}^2}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{cte nula por} \\ \text{condición inicial} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \dot{x} = 2\sqrt{\frac{k}{3}} x^{3/4}$$

Segu  $\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{\frac{k}{3}} x^{3/4} \Leftrightarrow \int x^{-3/4} dx = 2\sqrt{\frac{k}{3}} \int dt$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{1/4}}{1/4} = 2\sqrt{\frac{k}{3}} t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{cte nula por} \\ \text{condición inicial} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow x^{2/4} = 2\sqrt{\frac{k}{3}}t$$

$$x(t) = \left(2\sqrt{\frac{k}{3}}t\right)^4$$

Entonces:  $x(t) = \frac{k^2}{144}t^4$

Lo que implica:  $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 4 \cdot \frac{k^2}{144}t^3 \Rightarrow v_x(t) = \frac{k^2 t^3}{36}$

$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{3 \cdot k^2 t^2}{36} \Rightarrow a_x(t) = \frac{k^2 t^2}{12}$

En el eje  $y^1$ :  $\vec{a}_y = 4\hat{j} \Leftrightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad (\dots)$   
 $= \frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = 4 \quad \int dt$$

$$\Rightarrow \int dy = 4 \int dt \quad \downarrow \text{cond. iniciales nulas}$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = 4t \quad \int dt$$

$$\int dy = 4 \int t dt \quad \downarrow \text{cond. iniciales nulas}$$

$$y(t) = 2t^2$$

Lo que implica:

$$y(t) = 2t^2$$

$$v_y(t) = 4t$$

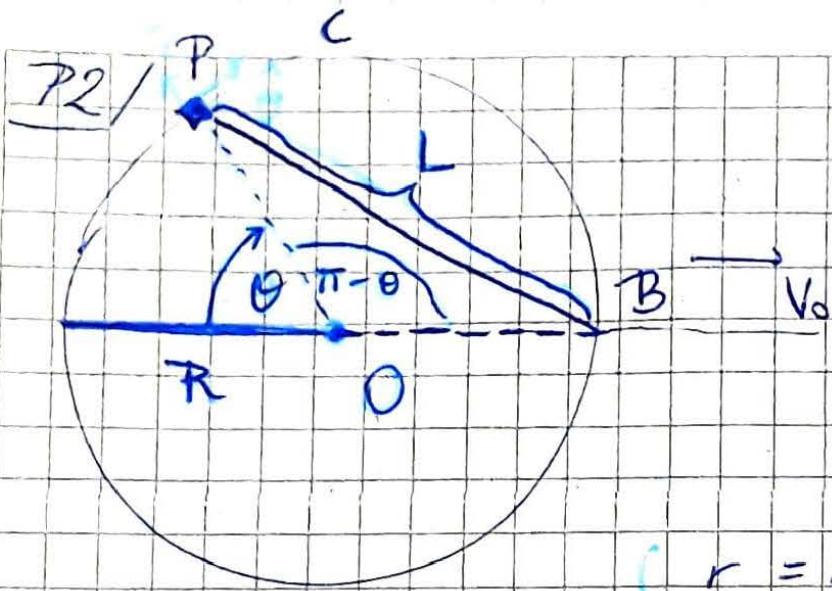
$$a_y(t) = 4$$

Si reemplazamos:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = \frac{k^2 t^4}{144} \hat{i} + 2t^2 \hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = \frac{k^2 t^3}{36} \hat{i} + 4t \hat{j}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \frac{k^2 t^2}{12} \hat{i} + 4\hat{j}$$



Utilizaremos coordenadas polares:

$$\vec{r} = r\vec{r}^1 + z\vec{z}^1$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{r}^1 + r\dot{\theta}\vec{\theta}^1 + \dot{z}\vec{z}^1$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}^1 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{\theta}^1 + \ddot{z}\vec{z}^1$$

Notamos que:

$$\begin{cases} r = R \\ \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = 0 \\ z = 0 \\ \dot{z} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = R\vec{r}^1$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{\theta}^1$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{r}^1 + R\ddot{\theta}\vec{\theta}^1$$

a)

Supongamos que el largo de la cuerda es  $L$ . Por el teorema del coseno tenemos:

$$L^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(\pi - \theta)$$

$$= 2R^2(1 - \cos(\pi - \theta))$$

$$= 2R^2(1 + \cos\theta)$$

Como  $L = L(t)$ , derivamos:  $\frac{d}{dt}(L^2) = \frac{d}{dt}(2R^2(1 + \cos\theta))$

Lo que equivale a:  $2L\dot{L} = 2R^2(-\sin\theta \ddot{\theta})$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{-L\dot{L}}{R^2 \sin\theta} \rightarrow \text{Lo que nos sirve para tener la sinusoidal completa.}$$

Notemos que  $\dot{L} = -v_0$ , ya que es la tasa de cambio de largo de la cuerda en el tiempo. El signo negativo es porque el largo disminuye!

$$\ddot{\theta} = \frac{v_0 L}{R^2 \sin\theta}$$

Y derivamos:  $\ddot{\theta} = \frac{v_0}{R^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{\sin\theta} \right)$

$$= \frac{v_0}{R^2} \cdot \frac{\dot{L} \sin\theta - L \frac{d}{dt}(\sin\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{v_0}{R^2} \cdot \left( \frac{\dot{L} \sin\theta}{\sin^2\theta} - \frac{L \cos\theta \dot{\theta}}{\sin^2\theta} \right)$$

$$= \frac{v_0}{R^2} \cdot \left( \frac{\dot{L}}{\sin\theta} - \frac{L \cos\theta \cdot \dot{\theta}}{\sin^2\theta} \right) \quad \text{reemplazamos } \dot{\theta} \text{ y } \dot{L}$$

$$= \frac{v_0}{R^2} \cdot \left( \frac{-v_0}{\sin\theta} - \frac{L \cos\theta \cdot \frac{v_0 L}{R^2 \sin\theta}}{\sin^2\theta} \right)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{v_0^2}{R^2} \left( \frac{1}{\sin\theta} + \frac{L^2 \cos\theta}{R^2 \sin^3\theta} \right)$$

Vemos qué ocurre en C:  $\theta = \pi/2$

Eso implica que:  $L^2 = 2R^2(1 + \cos(\pi/2)) = 2R^2$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2}R$$

Lo que implica que:  $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}^1$

$$= R \cdot \frac{v_0 L}{R^2 \sin\theta} \hat{\theta}^1$$

$$= R \cdot \frac{v_0 \sqrt{2} R}{R^2} \hat{\theta}^1$$

$$= \sqrt{2} v_0 \hat{\theta}^1$$

Según la rapidez es:  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2} v_0$

b) Para la aceleración:  $\vec{a} = -R\ddot{\theta}^2 \hat{r}^1 + R\ddot{\theta} \hat{\theta}^1$

$$\vec{a} = -R \cdot \left( \frac{v_0 \cdot L}{R^2 \sin\theta} \right)^2 \hat{r}^1 + R \cdot \left( -\frac{v_0^2}{R^2} \left( \frac{1}{\sin\theta} + \frac{L^2 \cos\theta}{R^2 \sin^3\theta} \right) \right) \hat{\theta}^1$$

$$= -\frac{R \cdot v_0^2 \sqrt{2}^2 R^2}{R^4} \hat{r}^1 + \left( -\frac{v_0^2}{R} \right) \cdot 1 \hat{\theta}^1$$

$$= -\frac{v_0^2}{R} \cdot 2 \hat{r}^1 - \frac{v_0^2}{R} \hat{\theta}^1 = -\frac{v_0^2}{R} (2\hat{r}^1 + \hat{\theta}^1)$$

Entonces Magnitud:  $\|\vec{a}\|^2 = \frac{v_0^4}{R^2} (4+1) = 5 \frac{v_0^4}{R^2}$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{5} \frac{v_0^2}{R}$$

P31 La loxodrómica es la línea que une 2 puntos cualesquiera de la superficie terrestre, cortando a todos los meridianos con el mismo ángulo. Es por eso, que es fácil seguir manteniendo el mismo rumbo marcado por la brújula. (Rhumb line en inglés)

Tenemos que las ecuaciones que describen la trayectoria que se mueve en una loxodrómica son:

$$\begin{aligned} r &= R & \text{y} & \quad \phi = N \cdot \theta \\ \dot{r} &= \ddot{r} = 0 & \quad \dot{\phi} &= N \dot{\theta} \wedge \ddot{\phi} = N \ddot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

Por lo que, si esto se mueve a una velocidad cenital constante y conocida  $\dot{\theta} = \omega_0$ , en las coordenadas esféricas, la posición, velocidad y aceleración quedan:  $\Rightarrow \dot{\phi} = N \omega_0$  y  $\ddot{\theta} = \omega_0$

$$\vec{r} = r \hat{r} = R \hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{r} = R \hat{r}}$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\phi} = R \dot{\theta} \hat{\theta} + R N \dot{\theta} \sin \theta \hat{\phi} = R \omega_0 (\hat{\theta} + N \sin \theta \hat{\phi})$$

$$\Rightarrow \vec{v} = R\omega_0 (\hat{\theta}^1 + N \sin \theta \hat{\phi}^1)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r}^1 \\ & + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta}^1 \\ & + (2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta) \hat{\phi}^1 \end{aligned}$$

$$= (-R\omega_0^2 - RN^2\omega_0^2 \sin^2 \theta) \hat{r}^1 - R\omega_0^2 N^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}^1 + 2R\omega_0 N \omega_0 \cos \theta \hat{\phi}^1$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -R\omega_0^2 (1 + N^2 \sin^2 \theta) \hat{r}^1 - R\omega_0^2 N^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}^1 + 2R\omega_0^2 N \cos \theta \hat{\phi}^1$$