

AUX 15 - PAUTA

P1) La energía antes del impulso es $E_0 = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GMm}{\sqrt{2}R_p} = 0$

Inmediatamente después del impulso es

$$E_1 = \frac{m}{2} (v_0^2 + v_T^2) - \frac{GMm}{\sqrt{2}R_p} = \frac{m}{2} v_T^2$$

El momento angular es $L = m \cdot \sqrt{2} R_p \cdot v_T$

Luego la energía es $E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m R_p^2 v_T^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$

En el punto de mínima distancia $\dot{r} = 0$, imponemos $r_{\min} = R_p$

$$E = m v_T^2 - \frac{GMm}{R_p} = E_1$$

↳ por conservación de la energía

$$v_T^2 - \frac{GM}{R_p} = \frac{1}{2} v_T^2 \rightarrow v_T^2 = \frac{2GM}{R_p}$$

Para $v_T > \sqrt{\frac{2GM}{R_p}}$ Bruce Willis salva al planeta

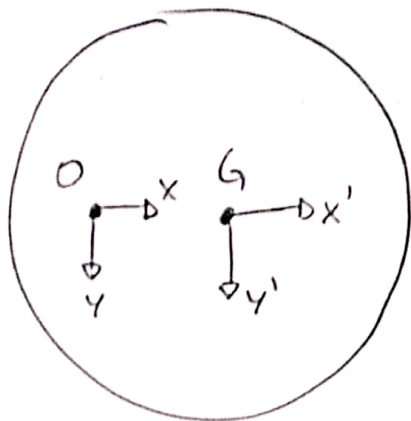
b) En el punto de mínima distancia $r(\psi=0) = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+E} = R_p$

$$E = \frac{\frac{L^2}{GMm^2 R_p}}{1+E} - 1 = \frac{2R_p v_T^2}{GM} - 1 = 3$$

c) Necesitamos $r(\psi=\theta) = \sqrt{2} R_p$

$$\frac{4R_p}{1+3\cos\theta} = \sqrt{2} R_p \rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

P21



Ponemos un SRNI sobre el centro del disco, y un SRI en el eje.

Por definición
$$I = \int dm \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

con x, y, z recorriendo el sólido. Utilizando variables polares en

G , tenemos

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = 0$$

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} \cdot r dr d\varphi$$

$$I^{(G)} = \frac{M}{\pi R^2} \int r dr d\varphi \int r^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\varphi$$

Integrales conocidas
 $\int \sin^2 = \int \cos^2 = \pi$
 $\int \sin \cos = 0$

$$= \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por teorema de Steiner $I^{(O)} = I^{(G)} + M \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$

con $\vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ el vector que va de O hacia G

$$I^{(0)} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (R/2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (R/2)^2 \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Suma de torques respecto a O

$$\sum \tau = \left(\frac{R}{2} \hat{x} \right) \times (Mg \hat{y}) + \left(\frac{3R}{2} \hat{x} \right) \times (-T \hat{y}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{MgR}{2} - 3 \frac{RT}{2} = 0 \rightarrow T = \frac{Mg}{3}$$

c) Suma de Fuerzas sobre el disco, con F la fuerza del eje

$$\sum F = F - Mg + \frac{Mg}{3} = 0 \rightarrow F = -\frac{2Mg}{3}$$

d) La energía es $E = \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 - Mg y_{cm}$

$$E = \frac{MR^2}{8} \dot{\varphi}^2 - Mg \frac{R}{2} \sin \varphi = 0$$

↳ Por condiciones iniciales

$$\dot{\varphi}^2(\varphi) = \frac{4g}{R} \sin \varphi$$

$$\text{Optimizando para } \dot{\varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \dot{\varphi}_{MAX} = \sqrt{\frac{4g}{R}}$$