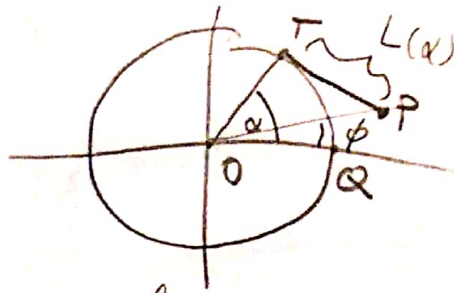


P 1



a) Antes de determinar la posición y la velocidad de P,
Primero determinemos el largo del trazo TP

Por geometría

$$L(\alpha) = R \alpha$$

Para determinar la posición, establecemos los vectores unitarios en el punto de tangencia T, así, la posición queda como



$$\begin{aligned} \vec{r}(\alpha) &= R \hat{\beta} - L(\alpha) \hat{\alpha} \\ &= R (\hat{\beta} - \alpha \hat{\alpha}) \end{aligned}$$

En donde $\hat{\beta} = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j}$
 $\hat{\alpha} = -\sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}$

Luego, la velocidad será

$$\vec{v}(\alpha, \dot{\alpha}) = \dot{\vec{r}}(\alpha) = \cancel{\dot{R}} \hat{\beta} + R \frac{\hat{\beta}}{\alpha} - \cancel{\dot{R}} \alpha \hat{\beta} - R \dot{\alpha} \hat{\alpha} - R \alpha \dot{\hat{\alpha}} - R \alpha \dot{\hat{\beta}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\alpha, \dot{\alpha}) = R \alpha \dot{\alpha} \hat{\beta}$$

b)

Usando el T. de Pitágoras, tenemos que

$$\rho = \sqrt{OT^2 + TP^2} = \sqrt{R^2 + R^2 \alpha^2} \\ = R \sqrt{1 + \alpha^2} //$$

Para determinar el ángulo $\angle POQ$, notamos que

$$\tan(\alpha - \phi) = \frac{TP}{OT} = \frac{R\alpha}{R} = \alpha \\ \angle POQ$$

$$\Rightarrow \alpha - \phi = \tan^{-1}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \phi = \alpha - \tan^{-1}(\alpha)$$

$$c) \text{ Calculemos } \frac{d\phi}{dt} = \phi' = \dot{\alpha} - \frac{d}{dt} \tan^{-1}(\alpha) = \dot{\alpha} - \frac{d}{d\alpha} (\tan^{-1} \alpha) \dot{\alpha}$$

$$= \dot{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}}{1 + \alpha^2}$$

$$= \frac{\dot{\alpha} \alpha^2}{1 + \alpha^2} //$$

$$\text{Si calculamos } \vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\rho|^2} = \frac{1}{R^2(1 + \alpha^2)} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\alpha} & \hat{k} \\ R & -R\alpha & 0 \\ R\alpha\dot{\alpha} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{R^2 \dot{\alpha} \alpha^2 \hat{k}}{R^2(1 + \alpha^2)} \\ = \frac{\dot{\alpha} \alpha^2}{1 + \alpha^2} \hat{k}$$

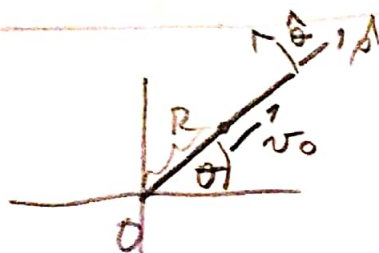
d) $\vec{\omega} = \dot{\alpha} \hat{k}$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\alpha} \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 1 + \alpha^2$$

$\Leftrightarrow 0 = 1$, es decir no se puede

P2



a) En primer lugar por la simetría del problema, usaremos coord. polares

$$\dot{\rho} = v_0 \Rightarrow \int_0^t \frac{d\rho}{dt} dt = \int_0^t v_0 dt$$

$$\Rightarrow \rho(t) = R + v_0 t$$

También tenemos que $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta = \omega t$

Luego

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} = (R + v_0 t) \hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_0 \hat{\rho} + \omega (R + v_0 t) \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -(v_0 t + R) \omega^2 \hat{\rho} + 2v_0 \omega \hat{\theta}$$

Luego

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\theta} & \hat{k} \\ v_0 & \rho \omega & 0 \\ -\rho \omega^2 & 2v_0 \omega & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} (\nu_0^2 \omega + \rho^2 \omega^3)$$

$$= \nu_0^2 \omega \left[2 + \left(t + \frac{R}{v_0} \right)^2 \omega^2 \right] \hat{k}$$

Luego, por def. de radio de curvatura

$$\rho_c = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} = \frac{v_0}{\omega} \frac{(1 + (t + \frac{R}{v_0})^2 \omega^2)^{\frac{3}{2}}}{(2 + (t + \frac{R}{v_0})^2 \omega^2)}$$

b) Usando Teorema $|d\vec{r}| = |\vec{v}| dt$

$$S = \int |d\vec{r}| = \int_0^T |\vec{v}| dt$$

$$= \int_0^T v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{R}{v_0} + t \right)^2 \omega^2} dt$$

En donde T se obtiene de

$$\rho(T) = 2R = v_0 T + R$$

$$\Rightarrow T = \frac{R}{v_0}$$

P3)

Usando la aceleración en esferas

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \quad a_\theta (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta)$$

$$a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \sin^2\theta)$$

Usando el enunciado

$$a_r = -2R\omega^2$$

$$a_\theta = -R\omega^2 \cot\theta$$

$$a_\phi = \frac{1}{\sin\theta} R \frac{d}{dt} (\omega \sin\theta) = R\omega^2 \cot\theta$$

$$\text{Donde } \theta = \omega t + \frac{\pi}{2} \quad (\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0)$$

b) Por definición

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{donde } \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} \\ = R\omega(\hat{\theta} + \hat{\phi})$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2}R\omega$$

$$\text{Luego } \hat{t} = \frac{(\hat{\theta} + \hat{\phi})}{\sqrt{2}} //$$

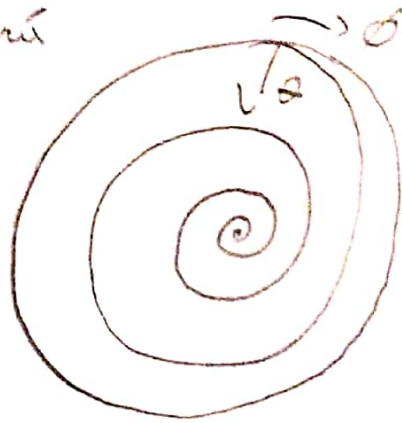
c) Toda aceleración se puede descomponer en

$$\vec{a} = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$$

Por definición $a_t = |\dot{\vec{v}}| = \frac{d}{dt}(\sqrt{2} R \omega) = 0$

Juego $\vec{a} = \vec{a}_n //$

d) Si proyectamos el hemisferio sur en el plano, la trayectoria será



$\phi' = \frac{\omega}{\sin \theta}$ si θ crece a partir de $\frac{\pi}{2}$, ϕ' crece

la partícula llega al polo en $t = \frac{\pi}{2\omega}$

Pero, cuando $\theta = \pi$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\omega}{\sin \theta} = \infty$$

$\Rightarrow \phi \rightarrow \infty$