

# Tarea 1

Profesor: Francisco Brieva

Estudiante: [REDACTED]

## Problema 1

- a) Sabemos que el triple producto escalar se puede definir como el determinante de la matriz que incluye los tres vectores mencionados en el enunciado:

(I)

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Luego, usando propiedades elementales del determinante de una matriz para intercambiar las filas de la misma, podemos desarrollar:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad (2)$$

El proceso es análogo para demostrar que  $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . Considerando además la conmutatividad del producto escalar, se llega a lo pedido en el enunciado.

- (II) Si algún par de vectores resultan ser idénticos, el resultado del triple producto escalar será 0, ya que, el producto vectorial entre ellos será el vector  $[0, 0, 0]$  y el producto escalar entre dicho vector y el restante, será 0.
- (III) La cara del paralelepípedo que se forma en el plano en el que se encuentran  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  será:

$$Area = 2 * \frac{1}{2} * \|\vec{a}\| * h \quad (3)$$

Donde h es la altura del vector  $\vec{b}$ , si se considera el vector  $\vec{a}$  en posición horizontal. Luego, si definimos  $\theta$  el ángulo formado entre ambos vectores, por trigonometría sabemos que  $h = \|\vec{b}\| \sin \theta$ :

$$Area = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \quad (4)$$

Luego, el volumen vendrá dado por dicha cara por la altura del paralelepípedo. Definiendo  $\omega$  el ángulo entre el vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  y el vector  $\vec{c}$ , podemos escribir:

$$Volumen = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \|\vec{c}\| \cos \omega = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \quad (5)$$

Esto último viene de la igualdad  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \alpha$ .

Se puede concluir entonces que el triple producto escalar sirve para calcular el volumen del paralelepípedo formado por tres vectores.

- b) (i) Desarrollando el primer producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Luego el segundo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (a_3b_1 - a_1b_3)c_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Reordenando términos y agregando un uno conveniente:

$$= \begin{pmatrix} (a_3c_3 + a_2c_2)b_1 - (b_3c_3 + b_2c_2)a_1 + a_1c_1b_1 - a_1c_1b_1 \\ (a_3c_3 + a_1c_1)b_2 - (b_3c_3 + b_1c_1)a_2 + a_2c_2b_2 - a_2c_2b_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2)a_3 + a_3c_3b_3 - a_3c_3b_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Finalmente:

$$= \begin{pmatrix} (a_3c_3 + a_2c_2 + a_1c_1)b_1 - (b_3c_3 + b_2c_2 + b_1c_1)a_1 \\ (a_3c_3 + a_2c_2 + a_1c_1)b_2 - (b_3c_3 + b_2c_2 + b_1c_1)a_2 \\ (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)a_3 \end{pmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad (9)$$

(II) Partiendo de  $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}$  y agregando la misma operación a ambos lados de la igualdad:

$$(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \quad (10)$$

Usando la demostración anterior:

$$\Leftrightarrow (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{a})\vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2 \vec{r} - \phi \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} \quad (12)$$

Despejando el vector  $\vec{r}$  llegamos a:

$$\Leftrightarrow \vec{r} = \frac{(\vec{b} \times \vec{a}) + \phi \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2} \quad (13)$$

## Problema 2

a) (I) Suponiendo que  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , entonces el producto punto queda:

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = a_1x + a_2y + a_3z = \alpha \quad (14)$$

Lo cual nos da la ecuación de un plano.

(II) Por lo tanto, la curva de la intersección de los dos planos resulta del sistema de ecuaciones:

$$a_1x + a_2y + a_3z = \alpha \quad (15)$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = \beta \quad (16)$$

Reescribiendo la ecuación (16):

$$\frac{a_3b_1x}{b_3} + \frac{a_3b_2y}{b_3} + a_3z = \frac{a_3\beta}{b_3} \quad (17)$$

Y restando (15) con (17):

$$(a_1 - \frac{a_3b_1}{b_3})x + (a_2 - \frac{a_3b_2}{b_3})y = \alpha - \frac{a_3\beta}{b_3} \quad (18)$$

b) La demostración es la siguiente:

$$\vec{a} = \hat{e}(\vec{a} \cdot \hat{e}) + \hat{e} \times (\vec{a} \times \hat{e}) \quad (19)$$

$$= \hat{e}(\vec{a} \cdot \hat{e}) - (\vec{a} \times \hat{e}) \times \hat{e} \quad (20)$$

Ahora, usando la propiedad demostrada en el Problema 1:

$$= \hat{e}(\vec{a} \cdot \hat{e}) - ((\vec{a} \cdot \hat{e})\hat{e} - (\hat{e} \cdot \hat{e})\vec{a}) \quad (21)$$

$$= \cancel{\hat{e}(\vec{a} \cdot \hat{e})} - \cancel{(\vec{a} \cdot \hat{e})\hat{e}} + \underbrace{(\hat{e} \cdot \hat{e})}_{\substack{\uparrow \\ \|\hat{e}\|^2 = 1}} \vec{a} \quad (22)$$

$$= \vec{a} \quad (23)$$

El primer término de la expansión corresponde a un vector que representa la proyección del vector  $\vec{a}$  sobre la recta por la que pasa el vector unitario. El segundo término representa el vector, ortogonal al primero.

Finalmente, sea  $\hat{e} = (c_1, c_2, c_3)$ . Como dicho vector es unitario, entonces su norma debe ser siempre 1. Es decir:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = 1 \quad (24)$$

Eliminando la raíz cuadrada y diferenciando llegamos a:

$$2c_1dc_1 + 2c_2dc_2 + 2c_3dc_3 = 0 \quad (25)$$

Despejando  $dc_3$ :

$$dc_3 = \frac{-(c_1dc_1 + c_2dc_2)}{c_3} \quad (26)$$

Ahora, partiendo desde el lado izquierdo de la expresión del enunciado:

$$\hat{e} \cdot \frac{d\hat{e}}{ds} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{ds} \\ \frac{dc_2}{ds} \\ \frac{dc_3}{ds} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Reemplazando  $dc_3$  con lo encontrado anteriormente y desarrollando:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{ds} \\ \frac{dc_2}{ds} \\ \frac{-(c_1dc_1 + c_2dc_2)}{c_3 ds} \end{pmatrix} = \frac{c_1dc_1}{ds} + \frac{c_2dc_2}{ds} + \frac{-(c_1dc_1 + c_2dc_2)}{ds} = 0 \quad (28)$$

### Problema 3

- a) Esta integral resulta sencilla de resolver si se reordenan los términos para encontrar una derivada dentro del argumento de la integral:

$$\int \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\ddot{r}}{r^2} \right) dt = \int \left( \frac{r\dot{\vec{r}} - \vec{r}\dot{r}}{r^2} \right) dt \quad (29)$$

$$= \int \left( \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) dt \quad (30)$$

$$= \frac{\vec{r}}{r} + C \quad (31)$$

En este último paso, por el teorema fundamental del cálculo se llega al resultado.

- b) Buscando en internet, encontré que se cumple lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \dot{\vec{A}} \times \vec{B} + \vec{A} \times \dot{\vec{B}} \quad (32)$$

Que vendría siendo una especie de regla de derivación de la multiplicación aplicada al producto cruz. Una buena demostración de lo anterior se encuentra [acá](#). Luego, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \quad (33)$$

Ahora, considerando que el producto cruz entre dos vectores idénticos es 0 e integrando a ambos lados, queda:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \int (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) dt \quad (34)$$

Finalmente, el resultado de la integral es  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + C$