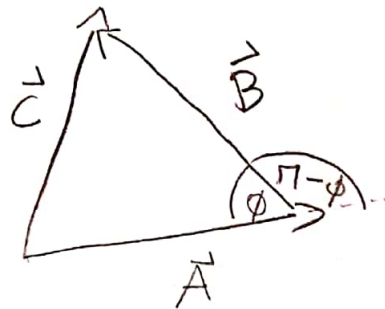


P1 N

Para aux 1

1) Ley del coseno

Para probar esto usamos el dibujo



Recordando la regla del paralelogramo

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \quad / \quad \parallel \quad \parallel \text{ Tomamos módulo a ambos lados}$$

$$\Rightarrow \|\vec{C}\| = \|\vec{A} + \vec{B}\| \quad / \quad ()^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{C}\|^2 = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

debe ahora

$$\|\vec{C}\|^2 = C^2$$

$$\|\vec{A}\|^2 = A^2$$

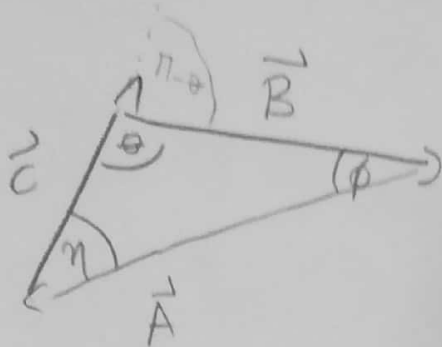
$$\|\vec{B}\|^2 = B^2$$

$$C^2 = \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{A}}_{A^2} + \underbrace{\vec{B} \cdot \vec{B}}_{B^2} + 2 \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{B}}_{2AB \cos(\widehat{AB})}$$

$$\Rightarrow C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\pi - \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \phi}$$

Para la ley del seno, del dibujo es un poco distinto:



Recordando el significado geométrico del producto cruz, el área del triángulo es

$$A_{\text{rea}} = \frac{1}{2} \|\vec{C} \times \vec{B}\| = \frac{\|\vec{A} \times \vec{B}\|}{2} = \frac{\|\vec{A} \times \vec{C}\|}{2}$$

Pero $\|\vec{C} \times \vec{B}\| = CB \sin(\pi - \theta) = +CB \sin(\theta)$

así mismo $\|\vec{A} \times \vec{B}\| = AB \sin \phi$

$$\|\vec{A} \times \vec{C}\| = AC \sin \eta$$

así

$$\frac{CB \sin \theta}{2} = \frac{AB \sin \phi}{2} = \frac{AC \sin \eta}{2} \quad \Bigg/ \cdot \frac{2}{ABC}$$

$$\boxed{\frac{\sin \theta}{A} = \frac{\sin \phi}{C} = \frac{\sin \eta}{B}}$$

P2

a) Probar que

$$\int (2\alpha \vec{r} \cdot \vec{v} + 2\beta \vec{v} \cdot \vec{a}) dt = \alpha r^2 + \beta v^2 + C$$

En primer lugar, veamos que, por TFC, si la igualdad anterior es cierta, entonces

$$2\alpha \vec{r} \cdot \vec{v} + 2\beta \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt} (\alpha r^2 + \beta v^2 + C)$$

Calculemos esa derivada

$$\frac{d}{dt} (\alpha \vec{r} \cdot \vec{r} + \beta \vec{v} \cdot \vec{v} + C) = \alpha \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) + \beta \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{dC}{dt} \quad 0$$

regla del producto

$$= \alpha \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} \right) + \beta \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right)$$

$$= 2\alpha \left(\underbrace{\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{r} \cdot \vec{v}} \right) + 2\beta \left(\underbrace{\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{v} \cdot \vec{a}} \right)$$

$$= 2\alpha \vec{r} \cdot \vec{v} + 2\beta \vec{v} \cdot \vec{a}$$

Luego, Tenemos que

$$2\alpha \vec{r} \cdot \vec{v} + 2\beta \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{d}{dt} (\alpha r^2 + \beta v^2)$$

$$\Rightarrow \int 2\alpha \vec{r} \cdot \vec{v} + 2\beta \vec{v} \cdot \vec{a} dt = \int \frac{d}{dt} (\alpha r^2 + \beta v^2) dt$$

$$= \alpha r^2 + \beta v^2 + C //$$

P3

a) Para demostrar que el movimiento es plano debemos encontrar un vector tal que

$$\hat{n} \cdot \vec{r} = \alpha$$

Juego, usando el enunciado y la aceleración definida

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \times \vec{\Omega}) / \cdot \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$\vec{\Omega}$ vector constante

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{\Omega} \cdot \vec{v})}{dt} = 0 \quad \left| \int_0^t \right.$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{v} - \vec{\Omega} \cdot \vec{v}_0 = 0$$

Perpendiculares

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{v} = \vec{\Omega} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} \cdot \vec{r} - \vec{\Omega} \cdot \vec{r}_0 = 0$$

$$\text{Luego } \vec{\Omega} \cdot \vec{r} = \vec{\Omega} \cdot \vec{r}_0$$

$\therefore$ el movimiento es plano

b) Del enunciado se tiene que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \times \vec{\Omega}) / v$$

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 = (\vec{v} \times \vec{\Omega}) \cdot \vec{v}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 0 \quad \text{ya que} \quad \frac{d\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = 2 \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv^2}{dt} = 0 \quad \text{Luego, como el módulo de la velocidad, la rapidez es constante}$$

c) En primer lugar, de la ecuación de movimiento tenemos que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\Omega} \quad \Bigg| \int_0^t dt$$

$$\vec{V} - \vec{V}_0 = \vec{r} \times \vec{\Omega} - \vec{r}_0 \times \vec{\Omega} \leftarrow \text{vector constant}$$

Juego, calculamos $\vec{r} \cdot \vec{V}$

$$\Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{V} = \vec{r} \cdot \vec{V}_0 + \underbrace{\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{\Omega})}_0 - \vec{r} \cdot (\vec{r}_0 \times \vec{\Omega})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} \cdot \vec{V} = \vec{r} \cdot (\vec{V}_0 - \vec{r}_0 \times \vec{\Omega})}$$

Juego, si queremos un movimiento no trivial, tal que $\vec{r} \cdot \vec{V} = 0$

$$\Rightarrow \vec{V}_0 - \vec{r}_0 \times \vec{\Omega} = 0 \Leftrightarrow \vec{V}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{\Omega}$$

Para despejar $\vec{r}_0$, hacemos producto cruz a ambos lados

$$\vec{\Omega} \times \vec{V}_0 = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_0 \times \vec{\Omega})$$

usando identidad de los trieros

$$= \vec{r}_0 \Omega^2 - \vec{\Omega} (\vec{r}_0 \cdot \vec{\Omega})$$

Si elegimos $\vec{r}_0 \cdot \vec{\Omega} = 0$, es decir que $\vec{r}_0$ pertenece al plano de movimiento

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_0 = \frac{\vec{\Omega} \times \vec{V}_0}{\Omega^2}}$$

d) Del la parte c) sabemos que

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\Omega} \quad / \quad \vec{r} \times$$

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) \\ &= \vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{\Omega}) - \vec{\Omega} r^2 \end{aligned}$$

Como en la parte anterior se impuso que $\vec{r}_0 \cdot \vec{\Omega} = 0$

$$\Rightarrow \text{por parte a) } \vec{r} \cdot \vec{\Omega} = 0$$

$$\Rightarrow -\vec{\Omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} = \vec{\omega} \quad \begin{array}{l} \text{definición} \\ \text{angular} \end{array} \leftarrow \text{velocidad}$$

Se espera que el movimiento sea circular, similar a lo que ocurre con partículas en un campo magnético

P4

a) Por definición de aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0 \leftarrow \text{condición del problema}$$

integraremos una vez

$$\int_0^t \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_0^t \underbrace{\vec{a}_0}_{\text{vector constant}} dt$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}_0 t$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

Luego, usando la definición de velocidad

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 \quad \Bigg/ \int_0^t dt$$

$$\leftarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}_0}{2} t^2$$

Primero, el movimiento de esta partícula es plano, como tomamos

$$\vec{n} = \vec{v}_0 \times \vec{a}_0$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \cdot \vec{r} = (\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \cdot \vec{r}_0 + (\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \cdot \vec{v}_0 t + (\vec{v}_0 \times \vec{a}_0) \cdot \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{n} \cdot \vec{r} = \alpha}$$

Es decir, la partícula se mueve en un plano definido por $\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$

Ahora, veamos, que pasa si $\vec{r}_0 = 0$ y $\vec{v}_0 \cdot \vec{a}_0 = 0$

Como el movimiento es plano, diremos que

$$\vec{r} = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}$$

Además, sin pérdida de generalidad, diremos que

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{i} \quad \vec{a}_0 = a_0 \hat{j}$$

Luego

$$x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} = v_0 t \hat{i} + \frac{a_0}{2} t^2 \hat{j}$$

$$\Rightarrow x = v_0 t$$

$$y = \frac{a_0}{2} t^2$$

$\Rightarrow$

$$y(x) = \frac{a_0}{2} \frac{x^2}{v_0^2}$$

— justamente
corresponde a una
Parábola

Podemos intentar a ver que pasa
cuando

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{i} + v_0 \sin \theta \hat{j}$$

$$\vec{a}_0 = -a_0 \sin \theta \hat{i} + a_0 \cos \theta \hat{j}$$

b) ya vimos que para el caso general el movimiento es plano, para el caso general, supondremos que

$$\vec{a}_0 = a_0 \hat{i} \text{ fijo en un eje } ; \vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}$$

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j}$$

Luego, siguiendo la ecuación vista en la parte a) esto queda como

$$X(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + v_{0x} t \hat{i} + v_{0y} t \hat{j} + \frac{a_0}{2} t^2 \hat{i}$$

$$\Rightarrow X = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_0}{2} t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y} t$$

Luego

$$t = \frac{y - y_0}{v_{0y}}$$

$$\Rightarrow X = x_0 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}} (y - y_0) + \frac{a_0}{2 v_{0y}^2} (y - y_0)^2$$

Esta ecuación corresponde a una parábola con el vértice (x_0, y_0) y con su directriz paralela al eje y

c) Si $\vec{v}_0$ es paralelo a $\vec{a}_0 \Rightarrow \vec{a}_0 = \lambda \vec{v}_0$ con λ alguna función

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{v}_0 \frac{\lambda t^2}{2}$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \left(t + \frac{\lambda t^2}{2} \right)$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 s} \quad \underbrace{s}_{\left(t + \frac{\lambda t^2}{2} \right)} \leftarrow \text{parámetro}$$

Con lo que llegamos a que la ecuación es una recta

$$\text{Si } \vec{v}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_0 s \quad \underbrace{s}_{\frac{t^2}{2}} \text{ nuevo parámetro}$$

misma conclusión