FI1100-2 Introducción a la Física Moderna
Profesor: Andrés Meza
Auxiliares: Álvaro Osorio, Miguel Letelier

Pauta Auxiliar 3

15 de Abril 2020

Antes de comenzar con el primer problema revisemos la ecuación de movimiento del enunciado, que es de esta forma:

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{1}$$

donde m, b y k son constantes conocidas, esta ecuación corresponde a un movimiento oscilatorio amortiguado, por lo cual para resolverla asumiremos que su solución es el producto entre una exponencial compleja (esta representa la oscilación armónica) y una exponencial real negativa (que representa el decaimiento producto del amortiguamiento):

$$x(t) = Ae^{-vt}e^{iwt} = Ae^{t(iw-v)} = Ae^{tr} \tag{2}$$

donde $r = iw - v$ y A, v, w son constantes a determinar, reemplazamos nuestro Ansatz en nuestra ecuación de movimiento (1)

$$Amr^2e^{tr} + Abre^{tr} + Ake^{tr} = 0 \tag{3}$$

$$r^2 + \frac{b}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \tag{4}$$

$$r = \frac{-b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{5}$$

reemplacemos (5) en (2), primero veamos que tenemos 2 soluciones posibles así que usaremos la combinación lineal de ambas que también es solución de la ecuación de movimiento (1)

$$x(t) = A' \exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) \exp\left(it\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\right) + A'' \exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) \exp\left(-it\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\right) \tag{6}$$

podemos renombrar las variables de una forma más familiar: $\omega_0^2 = k/m$ y $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$.

$$x(t) = A' \exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) \exp\left(it\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}\right) + A'' \exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) \exp\left(-it\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}\right) \tag{7}$$

Así podemos escribir los distintos casos de ω dependiendo si la expresión dentro de la raíz es positiva, negativa o cero:

$$\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} > 0 \Rightarrow e^{i\omega} \in \mathbb{C} \tag{8}$$

en este caso la solución corresponde al caso **subamortiguado** en donde las soluciones son el producto de una exponencial compleja que oscila en el tiempo por una exponencial real que decae en el tiempo.

ahora si:

$$\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} < 0 \Rightarrow e^{i\omega} \in \mathbb{R} \tag{9}$$

ahora tenemos que nuestras soluciones solo constarían de exponenciales reales este es el caso del movimiento **sobreamortiguado**, donde no hay oscilaciones

y finalmente

$$\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \tag{10}$$

este es el caso **críticamente amortiguado** y veamos que las dos soluciones que habíamos encontrado se transforman en la misma, esto es un problema ya que en los casos anteriores nuestra solución constaba de la combinación lineal de dos soluciones y este caso no puede ser distinto, por eso necesitamos otra solución que sea linealmente independiente con $\exp\left(\frac{-b}{2m}t\right)$ y esa solución es:

$$x(t) = At\exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) \tag{11}$$

así nuestra solución queda de la forma

$$x(t) = A'\exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) + A''t\exp\left(\frac{-b}{2m}t\right) \tag{12}$$

que veamos es el caso que nos piden estudiar en el problema 1.

P1. a) Tenemos que encontrar la posición de equilibrio, para ello consideremos la solución que nos entregan:

$$z(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} + C \tag{13}$$

pero a tiempo infinito, así $z(t \to \infty) = C$, para encontrar cuanto vale C consideremos que esto es cuanto esta estirado el resorte que sostiene la masa estando en equilibrio, así por la ley de Hooke el resorte realiza una fuerza de $F_{resorte} = Ck$ la cual es igual a la fuerza de gravedad, así:

$$Ck = mg \Rightarrow C = mg/k \tag{14}$$

b) Nuestras condiciones iniciales son: $z(t=0)=0$ y $\dot{z}(t=0)=v_{ini}=\sqrt{2gh}$
Evaluando la solución en tiempo $t=0$

$$z(t=0)=A+C=0 \Rightarrow A=-C \tag{15}$$

derivamos nuestro ansatz para encontrar B

$$\dot{z}(t)=-\omega_0 e^{-\omega_0 t}(A+Bt)+Be^{-\omega_0 t}=v_{ini} \tag{16}$$

imponiendo $t=0$

$$\dot{z}(t=0)=-\omega_0 A+B=v_{ini} \Rightarrow B=v_{ini}+\omega_0 A \tag{17}$$

c] Ver apunte

d) En este caso el oscilador disipa toda la energía cinética que trae la masa en su caída y en el equilibrio la única energía existente es el potencial del resorte que corresponde a:

$$U=\frac{1}{2}kC^2 \tag{18}$$

entonces la energía disipada por el resorte es:

$$E_{disp}=\frac{1}{2}mv_{ini}^2-U=mg(h-\frac{g}{\omega_0^2}) \tag{19}$$

e) Con la frecuencia natural del resorte ω_0

P2. **a)** Recordemos que la velocidad de una onda en una cuerda es:

$$c=\sqrt{T/\rho} \tag{20}$$

donde T es la tensión y ρ es la densidad de masa de la cuerda. Para nuestro problema de una cuerda colgando la tensión aumenta a medida que el pulso sube, de esta forma si tomamos como origen el extremo libre de la cuerda la tensión se puede escribir como:

$$T=\rho g y \tag{21}$$

donde y es la posición del punto de la cuerda donde nos interesa calcular su tensión medido desde el extremo libre, luego podemos escribir la velocidad como:

$$c=\sqrt{gy} \tag{22}$$

para poder calcular el tiempo que demora en recorrer la cuerda debemos integrar esta velocidad y para eso consideremos:

$$c = \frac{dy}{dt} = \sqrt{gy} \tag{23}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{g}dt \tag{24}$$

integrando esta ecuación tenemos:

$$\int_0^L \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^t \sqrt{g}dt \tag{25}$$

$$2\sqrt{L} = \sqrt{g}t \Rightarrow t = 2\sqrt{L/g} \tag{26}$$

b) Para este caso la tensión se ve modificada por $T = \rho g y + M g$, así la ecuación de la velocidad queda como:

$$c = \sqrt{gy + Mg/\rho} \tag{27}$$

para poder integrar haremos un cambio de variables:

$$K \equiv gy + Mg/\rho \tag{28}$$

pero además debemos cambiar los diferenciales, consideremos la siguiente regla de la cadena:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dy}\frac{dy}{dt} \tag{29}$$

$$\frac{dK}{dt} = g\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{g}\frac{dK}{dt} \tag{30}$$

reemplazando en nuestra ecuación:

$$\frac{dK}{dt} = g\sqrt{K} \tag{31}$$

integrando:

$$\int_{K=Mg/\rho}^{K=gy+Mg/\rho} \frac{dK}{\sqrt{K}} = gt \tag{32}$$

$$2[\sqrt{gy + Mg/\rho} - \sqrt{Mg/\rho}] = gt \tag{33}$$

finalmente:

$$t = 2\sqrt{M/g\rho}[\sqrt{m/M+1} - 1] \tag{34}$$

P3. **a)** Tenemos que la velocidad de una onda en la cuerda es $c = \sqrt{F/\rho}$, donde F es nuestra tensión, pero tenemos segmentos de cuerda que tienen distintas densidades, estas son $\rho_1 = m_1/L$, $\rho_2 = 4m_1/L$ y $\rho_3 = m_1/4L$, de esta forma las velocidades respectivamente son $c_1 = \sqrt{FL/m_1}$, $c_2 = \sqrt{FL/4m_1}$ y $c_3 = \sqrt{4FL/m_1}$ y así podemos calcular cuanto se demora por segmento, $t_1 = \sqrt{Lm_1/F}$, $t_2 = \sqrt{4Lm_1/F}$ y $t_3 = \sqrt{Lm_1/4F}$, lo que en total nos deja:

$$t_{tot} = \sqrt{21Lm_1/4F} \tag{35}$$

b) No depende del orden de los segmentos, esto ya que la velocidad (y por ende el tiempo que demora en recorrerlo) en un segmento no depende de las características de los demás segmentos, asi que el orden no importa en el tiempo.