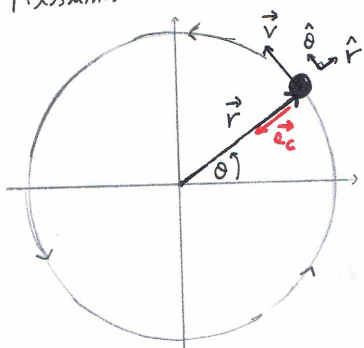


Parte Aux #4

• Resumen: $\rightarrow$ mov. circular uniforme (MCU)



• definiciones:

- frecuencia: $\nu = \frac{\text{n}^\circ \text{ vueltas}}{\text{tiempo}}$ $\rightarrow$ se mide en $\text{Hz} = 1/\text{seg}$
o RPM: revoluciones por minuto

- periodo: $T = \frac{\text{tiempo}}{\text{n}^\circ \text{ vueltas}}$

De estas definiciones es fácil apreciar que: $\nu = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{\nu}$

$\rightarrow$ vector posición $\vec{r}$: indica la posición de nuestra partícula

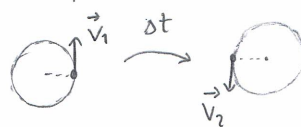
en este caso $\vec{r} = R \hat{r}$
 $\downarrow$ módulo $\downarrow$ dirección (unitario)

$\rightarrow$ vector velocidad $\vec{v}$: es siempre perpendicular a $\vec{r}$

en este caso $\vec{v} = v \hat{\theta}$ $\rightarrow$ notar que $\hat{\theta}$ apunta a la dirección de aumento de θ y $\hat{\theta} \perp \hat{r}$
 $\downarrow$ rapidez

$\hookrightarrow v = \frac{d}{t} = \frac{\text{Perímetro (1 vuelta)}}{t} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R \nu \leftarrow \text{es constante!}$

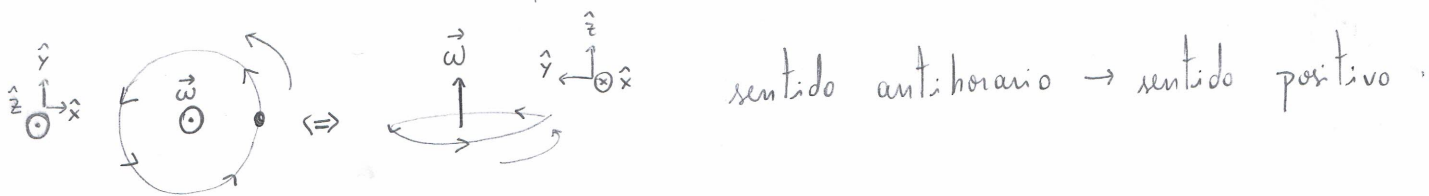
esto quiere decir que $|\vec{v}| = v$ es siempre constante, no así el vector $\vec{v}$, pues va variando:



$$\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$$
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

→ velocidad angular $\vec{\omega}$: vector que nos indique dirección y "valor" del giro

↳ dirección de $\vec{\omega}$: viene fuera del plano del movimiento



¿cómo determinar si el giro es positivo o negativo? Regla de la mano derecha

↳ tamaño: $\vec{\omega} = \omega \hat{z} \rightarrow \omega$ es análogo a la rapidez, pero se centra en el ángulo.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{2\pi (1 \text{ vuelta})}{T} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \leftarrow \text{constante}$$

⇒ Relación v y ω :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \left(\frac{2\pi}{T}\right) R = \omega R \rightarrow v = \omega R$$

↳ esto en parte viene de $L = \alpha R$ (α : ángulo en radianes) $\Rightarrow (L/t) = (\alpha/t) \cdot R$

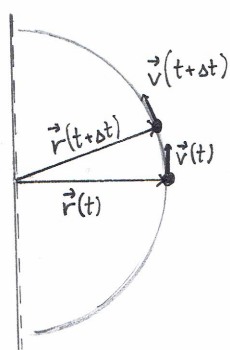
$$v = \omega R$$

→ Recordemos que $\vec{v}$ no es constante $\Rightarrow$ hay aceleración!

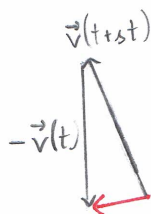
• Deduzcamos la dirección:

Sabemos que $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \rightarrow$ centrémonos en el término vectorial $\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

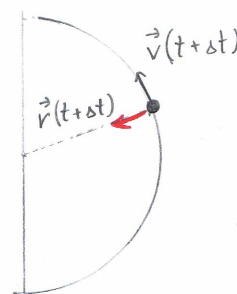
→ gráficamente:



$\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ en grande:



→ al superponer:



así podemos ver que la aceleración tiene dirección $(-\hat{r})$, es decir, siempre apunta al centro! → Por este motivo se denomina Centrípeta

→ tamaño: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = v \frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1}{\Delta t} = v \left(\frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1}{\Delta t} \right)$

notemos que $(\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1)$ es igual a la parte anterior

$\Rightarrow$ tiene dirección $(-\hat{r})$

y notemos que se recorrió un ángulo, luego $\vec{a} = v \left(\frac{\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1}{\Delta t} \right) = v \cdot \overbrace{\left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right)}^{\omega} (-\hat{r})$

$\therefore \vec{a} = v \cdot \omega (-\hat{r}) \Rightarrow a = v \cdot \omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

• mov. circular:

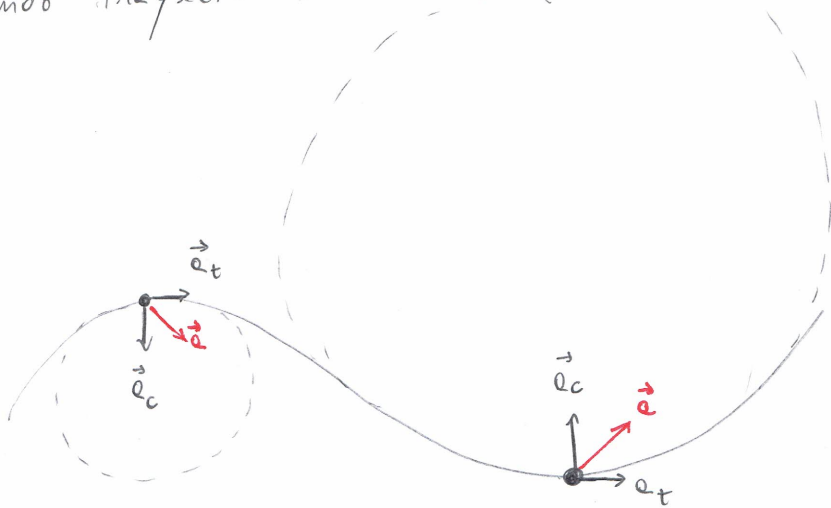
en el caso de que $|\vec{v}|$ no sea constante, es porque existe una aceleración tangencial

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \leftarrow \text{le repidez}$$

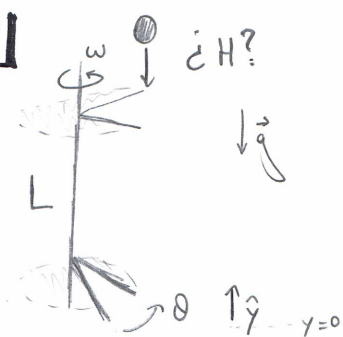
→ en ese caso la aceleración total queda:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t = \text{centrípeta} + \text{tangencial}$$

generando trayectorias curvas (esto es más complejo)



P11



idea: cuando la pelota llega al primer disco, debe hacerlo con una velocidad tal que logre cruzar la distancia L en el tiempo en que el segundo disco recorre el ángulo θ .

• Consideremos la pelota en $y=L$ con una velocidad v_H , así la pelota llega a $y=0$ en un tiempo t^* . Por itinerario:

$$y(t^*) = y_0 - v_H \cdot t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = L - v_H \cdot t^* - \frac{1}{2} g (t^*)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

• Pero sabemos que el disco gira con rapidez ω y debe recorrer un ángulo θ :

$$\omega = \frac{\theta}{t} \Rightarrow t^* = \frac{\theta}{\omega}$$

Luego, nuestra única incógnita en la ecuación de itinerario es v_H .

Sabemos que: $v(t) = \overset{\text{velocidad del reposo}}{v_0} - g \cdot t = -g \cdot t \Rightarrow v_H = -g t.$

en donde t es el tiempo transcurrido entre que la pelota es liberada en $y = H+L$ hasta que llega al primer anillo en $y = L$

Por ecuación de itinerario:

$$y(t.) = (H+L) + \underset{\text{v poro}}{\cancel{v_0} \cdot t.} - \frac{1}{2} g t.^2 = L \Rightarrow t. = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Así, la paleta unge el primer disco con una velocidad:

$$v_H = -g t. = -g \sqrt{\frac{2H}{g}} = -\sqrt{2Hg}$$

Reemplazando v_H y t^* en la ecuación anterior:

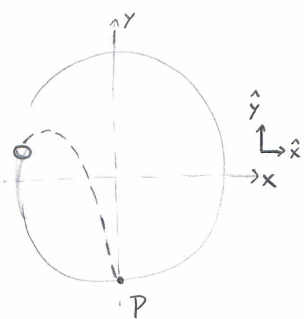
$$L - \sqrt{2Hg} \left(\frac{\theta}{\omega} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2Hg} = L \cdot \frac{\omega}{\theta} - \frac{1}{2} g \frac{\theta}{\omega}$$

$$\hookrightarrow H = \frac{1}{2g} \left(L \frac{\omega}{\theta} - g \frac{\theta}{2\omega} \right)^2 //$$

P21

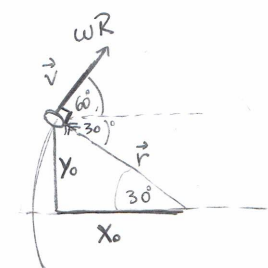
a) ¿ ω ? sabiendo que el anillo llega a P.



cosas a determinar: velocidad de salida
ángulo de salida

$\rightarrow y_P = -R$ y $x_P = 0$ ← ubicación del punto P

→ el anillo sale con una rapidez de ωR

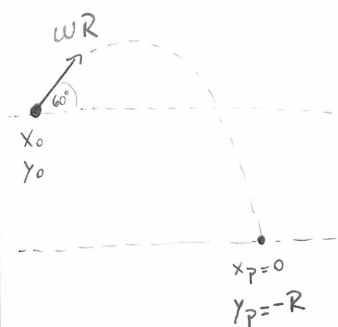


por trigonometría, la posición inicial del anillo:

$$y_0 = R \sin 30$$

$$x_0 = -R \cos 30$$

Ahora nuestro problema se simplificó a uno del estilo lanzamiento de proyectil:



↓ $\vec{g}$ armando las ecuaciones de movimiento:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t = -R \cos 30 + \omega R \cos 60 \cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = R \sin 30 + \omega R \sin 60 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Recordando que: $\sin(30) = 1/2$ y $\cos(30) = \sqrt{3}/2$; $\sin(60) = \sqrt{3}/2$ y $\cos(60) = 1/2$

$$\Rightarrow x(t) = -R \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \omega R \cdot t$$

$$y(t) = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \omega R t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ahora imponemos la posición de P:

$$x(t_p) = x_p = -\frac{\sqrt{3}}{2} R + \frac{\omega R}{2} t_p = 0 \Rightarrow t_p = \frac{\sqrt{3}}{\omega}$$

$$y(t_p) = y_p = \frac{1}{2} R + \frac{\sqrt{3}}{2} \omega R \left(\frac{\sqrt{3}}{\omega} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{\sqrt{3}}{\omega} \right)^2 = -R$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} g \cdot \frac{3}{\omega^2} = \frac{3R}{2} + \frac{3R}{2} \Rightarrow g \frac{1}{\omega^2} = 2R \quad \therefore \omega = \sqrt{g/2R}$$

b) $\vec{v}$ y $|\vec{v}|$ en $y=0$

$$v_x = R\omega \cdot \cos 60 = \frac{R\omega}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{g}{2R}} = \sqrt{\frac{Rg}{8}} \quad \leftarrow \text{es cte. pues no hay aceleración en } x$$

$$v_y = R\omega \sin(60) - g \cdot t^* = \frac{R\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{g}{2R}} - g t^* = \sqrt{\frac{3Rg}{8}} - g t^* \quad \leftarrow t^* \text{ el tiempo para que la pelota llegue a } y=0$$

Pero recordemos la siguiente ecuación: $v_f^2 - v_i^2 = 2a \cdot \Delta r \leftarrow \text{independiente de } t!$

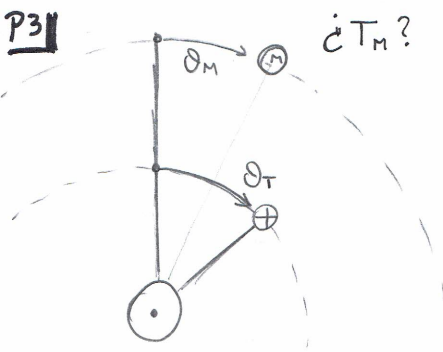
$$\Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2a \Delta r = \frac{3Rg}{8} - 2g \left(0 - \frac{R}{2} \right) = \frac{3Rg}{8} + \frac{8Rg}{8} = \frac{11Rg}{8}$$

$$\therefore v_{fy} = \pm \sqrt{\frac{11Rg}{8}} \rightarrow v_y = -\sqrt{\frac{11Rg}{8}} \text{ pues va cayendo}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sqrt{\frac{Rg}{8}} \hat{x} - \sqrt{\frac{11Rg}{8}} \hat{y} \quad \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\frac{Rg}{8} + \frac{11Rg}{8}} = \sqrt{\frac{3}{2} Rg}$$

$$\hookrightarrow \text{otra manera de expresar } \vec{v} = |\vec{v}| \text{ y el ángulo } \Rightarrow \begin{matrix} v_x \\ \vec{v} \\ v_y \end{matrix} \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \sqrt{\frac{\frac{11Rg}{8}}{\frac{Rg}{8}}} = \sqrt{11}$$

P31



Consideremos que en $t=0$ haye sido el instante de mayor acercamiento entre la Tierra y Marte.

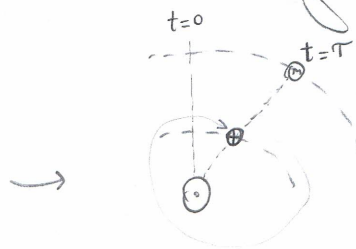
Definamos $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$ con $T_T = 1$ año

y recordando que $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta_T(t) = \omega \cdot t = \frac{2\pi}{T_T} \cdot t$

Análogamente, para Marte: $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ y $\theta_M(t) = \frac{2\pi}{T_M} \cdot t$

Como la Tierra orbita más rápido, tendremos que ella completará una vuelta y un poquito más cuando haye transcurrido un tiempo igual a τ :

$$\theta_T(\tau) = \underbrace{\theta_M(\tau)}_{\text{un poquito}} + \underbrace{2\pi}_{\text{la vuelta}}$$



$$\Rightarrow \frac{2\pi\tau}{T_T} = \frac{2\pi}{T_M} \cdot \tau + 2\pi \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\tau}{T_T} = \frac{\tau}{T_M} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_M} = \frac{1}{T_T} - 1 = \frac{1 - T_T}{T_T}$$

$$\Rightarrow T_M = \frac{\tau \cdot T_T}{\tau - T_T} = \frac{\tau}{\left(\frac{\tau}{T_T}\right) - 1} = \frac{2.14}{2.14 - 1} \approx 1.88 \text{ años}$$

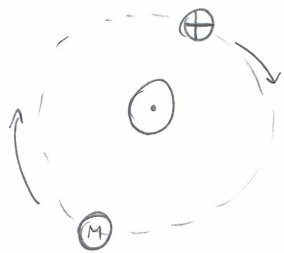
Si T es muy grande:

$$T \gg T_T \Rightarrow \frac{T}{T_T} \gg 1$$

y como: $T_M = \frac{T}{\frac{T}{T_T} - 1} \approx \frac{T}{\frac{T}{T_T}} = T_T \Rightarrow T_M \approx T_T$

Tiene sentido, pues está diciendo que el planeta esté en una posición similar a la terrestre.

Consideremos:



T muy grande $\rightarrow \infty$ implicaría
que ambos planetas están en la misma órbita, por
lo que nunca se "cruzarían".