MA1001 - Introducción al cálculo
Tutoría - Sucesiones

Autor: Manuel Torres

Términos y forma de una sucesión

P1.- Decida si las siguientes fórmulas definen una sucesión. Justifique sus respuestas.

a) $a_n = \sqrt{1+\operatorname{sen}(n)}$

b) $a_n = \ln(n-5)$

c) $a_n = \ln(-n)$

d) $a_n = \ln(\operatorname{sen}(n))$

e) $a_n = \ln(\cos(\frac{1}{n}))$

f) $a_n = \sqrt{-n}$

g) $a_n = \sqrt{n^2-9}$

P2.- Determine los 20 primeros valores de cada una de las siguientes sucesiones utilizando excel.

a) $a_n = \dfrac{1-n}{n^2}$.

b) $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

c) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-2}$.

d) $a_n = 2+(-1)^n$.

e) $a_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$.

f) $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}$

P3.- Determine los 20 primeros valores de cada una de las siguientes sucesiones recursivas utilizando excel.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2^n}$.

b) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$.

c) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{a_n}{2}$.

d) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = \dfrac{na_n}{n+1}$.

e) $a_1 = a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

f) $a_1 = 2,\ a_2 = -1,\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

P4.- Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión según corresponda.

a) La sucesión: $1,-1,1,-1,1,-1,...$

b) La sucesión: $-1,1,-1,1,-1,1,...$

c) La sucesión: $-4,9,-16,25,-36,49,...$

d) La sucesión: $1,-\frac{1}{4},\frac{1}{9},-\frac{1}{16},\frac{1}{25},-\frac{1}{36},\frac{1}{49},...$

e) La sucesión de los enteros a partir del -3.

f) La sucesión de cada dos enteros positivos pares, a partir del 2.

g) La sucesión de los números 1 y 0 alternados, comenzando por el 1.

Cálculo de límites de sucesiones

P5.- El objetivo de este problema es revisar distintas técnicas para calcular límites de sucesiones, siguiendo las instrucciones propuestas, determine los límites de sucesiones.

a) Multiplicando por un 1 conveniente, de la forma $\frac{1/n}{1/n}$, calcule el siguiente límite:

$$\lim_n \left(\frac{2n-2}{1-n}\right)$$

b) Utilice la estrategia implementada en (a), con el fin de hacer 1 al término de mayor orden del denominador para calcular el siguiente límite:

$$\lim_n \left(\frac{2\sqrt{n}-n+3}{n^2+n-7}\right)$$

c) Utilizando que $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (desracionalizando), calcule el siguiente límite:

$$\lim_n \left((\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+2}\right)$$

d) Si las sucesiones $a_n=(-1)^n$ y $b_n=\operatorname{sen}(n)$ son sucesiones acotadas, utilizando las técnicas de las partes anteriores y la proposición de *nula·acotada*, calcule el siguiente límite:

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n+\operatorname{sen}(n)}$$

e) 1) Suponiendo que $a_n=\frac{n!}{n^n}$ y $b_n=\frac{a_n}{n!}$ son sucesiones nulas con $a\in\mathbb{R}$, y $k\in\mathbb{N}$, encuentre el límite de la sucesión $c_n=\frac{a^n}{n^n}$.

2) Suponiendo conocido el límite de c_n, y multiplicando por un 1 conveniente calcule el siguiente límite:

$$\lim_n \left(\frac{a^n n^k n!}{n^n(1+(n+1)!)}\right)$$

P6.- Calcule los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

b) $a_n=\left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

c) $a_n=\frac{1}{n^4}\operatorname{sen}(n)$.

d) $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{e^n}$.

e) $a_n=\frac{n!}{n^n}$.

f) $a_n=\frac{-\cos(\pi n)}{n!}$

P7.- (a) Demuestre que si existe $\lim_n na_n$ (osea que la sucesión es convergente), entonces $\lim a_n=0$, con a_n una sucesión cualquiera.
Hint: Utilice que una sucesión convergente es acotada.

(b) Sean α,β constantes positivas. Si se sabe que $\lim_n n(\sqrt{n^2+n+1}-(n\alpha+\beta))$ existe, calcule el valor de α y β y luego encuentre el valor del límite.
Hint: Utilice que $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ son sucesiones nulas.

Definición de convergencia

P8.- Utilizando la siguiente definición de convergencia:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0), |s_n - l| \leq \varepsilon$$

Demuestre que:

a)

$$\lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_n \sqrt{3 - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{3}$$

P9.- Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tales que $(a_n) \to l$ y $|a_n - b_n| \to 0$. Demuestre utilizando la definición de convergencia que $(b_n) \to l$.
Hint: Utilice la desigualdad triangular: $|u + v| \leq |u| + |v|$.

P10.- Sea (x_n) una sucesión tal que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ tal que } (\forall n, m \geq n_0), |x_n - x_m| \leq \varepsilon$$

Pruebe que la sucesión (s_n) definida a continuación converge a 0.

$$s_n = (\sqrt{(\pi n)^2 + n} - \pi n)\frac{x_n}{n}$$

Hint: Comience probando que (x_n) *es una sucesión convergente para concluir que es acotada.*